# Mer lineær algebra

**Kompendium i MAT1012 – Matematikk 2**

**Våren 2014**

**Inger Christin Borge**

**Matematisk institutt, UiO**

# Forord

Dette kompendiet er skrevet til bruk i andre del av emnet MAT1012. I dette emnet jobber vi under mottoet 'Mer matematikk', og du vil lære mer matematikk som vil være nyttig i forbindelse med studier i bl.a. kjemi.

Emnebeskrivelsen for MAT1012 – Matematikk 2 er som følger:

***Kort om emnet:***

*Dette emnet bygger videre på lineære likningssystemer og differensiallikninger fra emnet MAT1001, og er delt i to hovedtemaer:*

*1) Mer funksjonsteori i en og flere variabler (maksimum- og minimumsproblemer, integrasjon og lineær approksimasjon). Anvendelser.*

*2) Mer lineær algebra (lineære avbildninger, lineær uavhengighet, invertible matriser, diagonalisering). Systemer av differensiallikninger. Anvendelser.*

***Hva lærer du?***

*Under mottoet 'Mer matematikk' gir dette emnet deg mer matematikkkunnskap som vil være sentral og viktig innen videre realfagsstudier som for eksempel kjemi. Målet er å gi deg flere analytiske og numeriske ferdigheter som kan anvendes på realfaglige problemstillinger.*

I dette kompendiet skal vi ta for oss mer lineær algebra (kapittel 1-3), og ende opp med å løse noen spesielle systemer av difflikninger (kapittel 4). Vi tar utgangspunkt i kurset MAT1001, og siden boka *Matematisk verktøykasse* er pensum i det kurset, vil du finne noen henvisninger til denne boka underveis.

Underveis gis det også mange eksempler, samt oppgaver med fasit til hvert kapittel. Det er veldig viktig at du prøver å løse alle oppgavene! Husk at det er nettopp da du virkelig ser hva du har forstått. Hjelp vil du få underveis. Lykke til med kurset!

Tusen takk til Erik Bédos for kontinuerlige og motiverende tilbakemeldinger på stoffet, Tom Lindstrøm for tillatelse til bruk av stoff og oppgaver i MAT1110-heftet, og Carl Henrik Görbitz, Arne B. Sletsjøe, Elisabeth Seland og Einar Uggerud for diskusjoner og innspill i MAT1012-arbeidet. Også en stor takk til Dina Haraldsson for hjelp med tidligere eksamensoppgaver.

Send gjerne trykkfeil og kommentarer til ingerbo@math.uio.no

Dette kompendiet er en revidert versjon av kompendiet som ble brukt i MAT1012 våren 2010. I denne versjonen er det tatt inn noe nytt stoff i forhold til versjonen fra 2013 - tusen takk til Arne B. Sletsjøe for innspill. I tillegg er det rettet opp en del trykkfeil o.l. - tusen takk til tidligere studenter som har meldt inn dette.

Blindern, januar 2014
Inger Christin Borge

# Innhold

# Kapittel 1

# Mer om lineære likningssystemer, vektorer og matriser

I dette kapittelet tar vi utgangspunkt i lineære likningssystemer, som vi lærte om i MAT1001, og setter dette inn i et større rammeverk, kalt lineær algebra.

## 1.1 Begrepet *lineær*

Ordet lineær vil dukke opp veldig ofte, og vi minner aller først om hva som ligger i begrepet lineær likning:

**Definisjon 1.1** *La $n$ være et naturlig tall. En (reell) lineær likning i $n$ variabler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er en likning på formen*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1.1}$$

*der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og $b$ er (reelle) konstanter. Tallene $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kalles koeffisientene til likningen.*

I den lineære verdenen handler det altså om operasjonene *addisjon* og *mulitiplikasjon med en konstant* (ofte kalt en *skalar*). I matematikken brukes også begrepet «struktur», og vi sier at en mengde med operasjonene nevnt ovenfor har en «lineær struktur». Begrepet «lineær algebra» vil vi komme tilbake til litt senere i kapittelet.

Vi vet at løsningen(e) til (1.1) er $n$-tupler ($n$ tall ordnet i en bestemt rekkefølge), som vi også kan tenke på som vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vi har også valgt å skrive $n$-tupler som kolonnevektorer, dvs. vi bruker skrivemåtene

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Vi vil bruke ordet vektor oftere enn ordet tuppel i dette kurset, og **med vektor mener vi kolonnevektor**. Vi vil veksle mellom de tre skrivemåtene i (1.2).

Vi vil videre få bruk for følgende regneregler for vektorer i $\mathbb{R}^n$:

**Teorem 1.2** *La* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *være vektorer i* $\mathbb{R}^n$*, og la* $k$ *og* $l$ *være skalarer. Vi har følgende regneregler for addisjon:*

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(kommutativitet)*
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(assosiativitet)*
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ *(nullvektorens egenskap)*
- $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ *(additiv invers)*

*og for skalar multiplikasjon:*

- $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
- $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
- $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

## 1.2 Vektorformen til et lineært likningssystem

Vi starter med et lineært likningssystem med $m$ likninger og $n$ variabler:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1.3}$$

Ved å bruke definisjonen av produkt av matriser, kan dette systemet skrives som:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

La $A$ være koeffisientmatrisen, dvs. $A = [a_{ij}]$, la $\mathbf{x}$ være kolonnevektoren $[x_j]$ og $\mathbf{b}$ være kolonnevektoren $[b_i]$, der $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$. Da kan (1.4) skrives på *matriseform*

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}. \tag{1.5}$$

Likningen (1.5) er en *matriselikning*.

Vi har sett at det å skrive et lineært likningssystem på matriseform åpner mange dører for oss. Her er en dør til: La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ være kolonnene til matrisen $A$ skrevet som kolonnevektorer, dvs.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Legg merke til at

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\
&= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.
\end{aligned}
$$

Dette betyr at vi kan skrive

$$
\boxed{A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.}
$$

Dette betyr videre at vi også kan skrive likningssystemet (1.3) på *vektorform*

$$
\boxed{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}} \tag{1.6}
$$

der $\mathbf{a}_i$-ene er kolonnene i koeffisientmatrisen til likningssystemet. Likningen (1.6) er en *vektorlikning*.

**Eksempel 1.3** Det lineære likningssystemet

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}
$$

kan skrives som matriselikningen

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

og som vektorlikningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(sjekk!). ■

Vi har nå tre måter å se på et lineært likningssystem:

1) som et lineært likningssystem

2) som en matriselikning

3) som en vektorlikning

Å ha flere måter å se ting på er alltid nyttig, og noen ganger vil det ene synspunktet passe bedre enn de andre. Uansett, for å løse et lineært likningssystem, er metoden å radredusere den *utvidede matrisen* $[A\ \mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n\ \mathbf{b}]$. (Se f.eks. kapittel 3 i *Matematisk verktøykasse*.)

Siden vi kun har brukt matrisemultiplikasjon og ulike skrivemåter for samme likningssystem, vil alle de tre synsmåtene 1)–3) gi de samme løsningene. Vi oppsummerer:

**Teorem 1.4** *Hvis $A$ er en $m \times n$-matrise med kolonner $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ og $\mathbf{b}$ er en vektor i $\mathbb{R}^m$, så har matriselikningen*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

*samme løsningsmengde som vektorlikningen*

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

*der $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*
*Videre har begge likninger samme løsningsmengde som det lineære likningssystemet med utvidet matrise*

$$[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n\ \mathbf{b}].$$

## 1.3 Anvendelse: Å balansere en kjemisk (reaksjons)likning

Kjemi er kort sagt studiet av stoffer, litt mer presist er det studiet av hvordan et stoffs egenskaper endres ved å endre sammensettingen av stoffet. Slike endringer skjer ved hjelp av ulike kjemiske reaksjoner.

Verdenen vi lever i er full av ulike stoffer. Grunnstoffene er de stoffene som bare består av én type atomer. Naturlig eller kunstig, ulike atomer kan reagere med hverandre og danne molekyler, som er en samling atomer med kjemiske bindinger mellom seg. Når ulike stoffer reagerer med hverandre, forandres bindinger og sammensettinger av molekylene i stoffet, og vi får stoffer med nye egenskaper, som kan brukes til de utroligste ting.

I dag kjenner man til over 4 millioner kjemiske stoffer - da er det nødvendig å bruke matematikk for å holde litt styr på alle disse stoffene.

La oss se på et eksempel på en kjemisk reaksjon: Når matavfall eller dyregjødsel råtner uten tilgang på oksygen, dannes såkalt biogass, som for det meste består av stoffet/gassen metan. Det kjemiske symbolet for metan er $CH_4$, dvs. et metanmolekyl består av et karbonatom C og 4 hydrogenatomer H, der de kjemiske bindingene mellom atomene i dette molekylet gir metan de egenskapene det har.

Avfallsdeponiene brenner gjerne metanen på stedet for å unngå at metangassen slipper ut i atmosfæren. Noen ganger utnyttes gassen også til varme. Når metangass brenner (under tilgang på oksygen $O_2$), dannes karbondioksyd, $CO_2$, som har langt lavere drivhuseffekt enn metan, og vann $H_2O$.

Vi kan skrive den kjemiske reaksjonen med symboler, kalt en *kjemisk (reaksjons)likning*:

$$\mathrm{CH_4} + \mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O}$$

I en kjemisk reaksjon er det ingen atomer som dannes eller forsvinner - de bare «bytter plass». Det betyr at det må være

$$\text{samme antall atomer av hvert grunnstoff på hver side av reaksjonspilen.} \tag{1.7}$$

Å oppfylle (1.7) kalles å *balansere* den kjemiske likningen. For å få til dette må vi for metangassbrenningen finne positive heltall $x_1, x_2, x_3$ og $x_4$ i reaksjonen

$$x_1\mathrm{CH_4} + x_2\mathrm{O_2} \to x_3\mathrm{CO_2} + x_4\mathrm{H_2O}$$

slik at antall karbon-, hydrogen- og oksygenatomer er likt på begge sider av pilen. Matematisk kan vi tenke oss pilen som et likhetstegn og de kjemiske symbolene som algebraiske symboler, og bruke parentesregler og algebramanipulasjoner for å få likhet mellom de to uttrykkene.

I dette tilfellet har vi fire variabler, og ved å prøve oss frem, ser vi fort at en mulig løsning er $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 1, 2)$, dvs. en balansert likning er

$$\boxed{\mathrm{CH_4} + 2\mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} + 2\mathrm{H_2O}}.$$

Legg merke til at vi i kjemiske reaksjoner ønsker de *minste* positive heltallene som balanserer likningen.

For å balansere større likninger, f.eks.

$$\mathrm{PbN_6} + \mathrm{CrMn_2O_8} \to \mathrm{Pb_3O_4} + \mathrm{Cr_20_3} + \mathrm{MnO_2} + \mathrm{NO} \tag{1.8}$$

er det ikke alltid lett å prøve seg frem - vi trenger en enklere måte å finne koeffisientene i en kjemisk likning. Hjelpen kommer fra matematikken: **en kjemisk likning gir nemlig opphav til et lineært likningssystem på vektorform.**

Du skal få balansere (1.8) i en av oppgavene. La oss vise metoden for å balansere en kjemisk likning på et litt kortere eksempel:

**Eksempel 1.5** Salpetersyre, $\mathrm{HNO_3}$, brukes bl.a. til produksjon av kunstgjødsel og sprengstoff. Ostwaldprosessen er en kjemisk prosess for å lage salpetersyre, og det første som skjer i denne prosessen er at ammoniakk, $\mathrm{NH_3}$, «brennes» i følgende reaksjon:

$$\mathrm{NH_3} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{NO} + \mathrm{H_2O}.$$

La oss se hvordan vi kan bruke teorien om lineære likningssystemer for å balansere denne likningen, dvs. vi skal finne $x_1, x_2, x_3$ og $x_4$ i den kjemiske likningen

$$x_1\mathrm{NH_3} + x_2\mathrm{O_2} \to x_3\mathrm{NO} + x_4\mathrm{H_2O}$$

slik at (1.7) er oppfylt. (Løsningen er lett å finne uten å gå veien om den metoden vi nå viser, så finn gjerne løsningen ved å prøve deg frem, og sjekk at det stemmer med det vi finner med den mer systematiske metoden.)

Vi ser at det er *tre* grunnstoff som inngår i reaksjonen: N (nitrogen), H (hydrogen) og O (oksygen). For hvert stoff/molekyl i reaksjonen, setter vi nå opp en vektor som sier hvor mange atomer av hvert grunnstoff molekylet inneholder, dvs. vi finner vektoren

$$\begin{bmatrix} \text{antall N} \\ \text{antall H} \\ \text{antall O} \end{bmatrix}$$

Vi får vektorene

$$\mathrm{NH_3}: \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{O_2}: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{NO}: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{H_3O}: \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det betyr at det å balansere den kjemiske likningen blir det samme som å løse (den matematiske) vektorlikningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ved å flytte alle leddene over på venstre side, får vi den homogene likningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som på matriseform er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Siden systemet er lineært, vet vi at det har ingen, én eller uendelig mange løsninger. Siden det også er homogent vet vi at det har minst én løsning, nemlig den trivielle. Men siden dette er et problem som bør ha en ikke-triviell løsning (det skal være mulig å balansere denne likningen), forventer vi å få uendelig mange løsninger. Vi er ute etter den minste positive heltallige løsningen blant disse. Dersom en slik løsning ikke finnes, betyr det at den oppsatte kjemiske likningen ikke lar seg realisere.

Vi radreduserer den utvidede matrisen (for repetisjon, se f.eks. kapittel 3 i *Matematisk verktøykasse*):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{-3\cdot R_1 \text{til} R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{2}\cdot R_2 \\ \frac{1}{3}R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{\frac{1}{2}\cdot R_3 \text{til} R_2 \\ R_3 \text{til} R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Det gir løsningsmengden

$$\{(x_1, x_2, x_x, x_4)\} = \{(\tfrac{2}{3}s, \tfrac{5}{6}s, \tfrac{2}{3}s, s) \colon s \in \mathbb{R}\}$$

og valget $s = 6$ gir den minste positive heltallige løsningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 5, 4, 6).$$

Den balanserte likningen er derfor

$$\boxed{4NH_3 + 5O_2 \to 4NO + 6H_2O}.$$

■

Du synes kanskje dette eksempelet heller ga oss mer arbeid? Enig, men eksempelet har vist oss at ved hjelp av vektorer og matriser får vi *systematisert* prosessen med å balansere kjemiske likninger. Denne metoden kan *generaliseres* til store og kompliserte likninger - noe som er spesielt nyttig når vi i tillegg vet at datamaskiner lett løser lineære likningssystemer, og vi slipper å radredusere for hånd. Dessuten vil matrisene vi jobber med i forbindelse med kjemiske reaksjoner ha ganske mange 0-ere blant komponentene, noe som letter radreduseringen.

Vi oppsummerer metoden i eksempelet:

**Å balansere en kjemisk (reaksjons)likning:**

- For hvert stoff/molekyl som inngår
  - innfører vi en variabel $x_i$ (koeffisienten til stoffet/molekylet),
  - setter vi opp en vektor $\mathbf{a}_i$ som sier hvor mange atomer av hvert grunnstoff stoffet/molekylet inneholder.
- Vi setter opp en vektorlikning med ledd $x_i\mathbf{a}_i$ for hvert molekyl, der reaksjonspilen byttes ut med likhetstegn.
- Vi flytter alle ledd i vektorlikningen over på venstre side, og får et homogent lineært likningssystem i variablene $x_i$, som vi løser.
- Problemet med å balansere en kjemisk likning vil gi uendelig mange løsninger, og vi velger den minste positive heltallige løsningen for å få koeffisientene $x_i$ i den kjemiske likningen.

## 1.4 Et viktig resultat

I uttrykket $A\mathbf{x}$ multipliserer vi en matrise med en kolonnevektor. Vi vet at for å legge sammen vektorer, gjør vi dette komponentvis. Tilsvarende multipliserer vi en vektor med en skalar ved å multiplisere hver av komponentene med skalaren.

Hva skjer når vi multipliserer en matrise med en sum av vektorer? Hva skjer når vi multipliserer en matrise med en vektor multiplisert med en skalar? Dette er som vi vet den lineære strukturen til vektorer - *vil denne strukturen bevares når vi multipliserer med en matrise?* (Slike spørsmål er meget viktige for matematikere - husk at det alltid er viktig å stille seg spørsmål.)

Svaret er «ja, den lineære strukturen bevares ved å multiplisere med en matrise», og nettopp ved å skrive $A\mathbf{x}$ på vektorform, kan vi vise dette viktige resultatet:

**Teorem 1.6** *La $A$ være en $m \times n$-matrise, $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$, og $k$ en skalar. Da er*

$$\begin{aligned} &i) \quad A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}; \\ &ii) \quad A(k\mathbf{x}) = k(A\mathbf{x}). \end{aligned}$$

*Bevis:* Beviset gjennomføres ved utregning, så vi innfører vektorer og komponenter, slik at vi kan bruke regnereglene for vektorer i teorem 1.2 og vår observasjon før teorem 1.4:

Vi kaller kolonnene til $A$ for $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n$, og komponentene til $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ for henholdsvis $x_1, x_2, \dots, x_n$ og $y_1, y_2, \dots, y_n$. Det gir følgende utregninger

$$
\begin{aligned}
i)\ A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) \\
&= [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} \\
&= (x_1+y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2+y_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_n+y_n)\mathbf{a}_n \\
&= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n + y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_n\mathbf{a}_n \\
&= A\mathbf{x} + A\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii)\ A(k\mathbf{x}) &= [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]\left(k\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) \\
&= [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix} \\
&= (kx_1)\mathbf{a}_1 + (kx_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (kx_n)\mathbf{a}_n \\
&= k(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n) \\
&= k(A\mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

som er det vi ønsket å vise. $\square$

Grunnen til at dette resultatet er viktig ligger i begrepet *lineær avbildning*.

## 1.5 Lineære avbildninger

Vi kommer nå til det viktigste begrepet i lineær algebra, nemlig lineær avbildning:

**Definisjon 1.7** *En lineær avbildning $T$ fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er en funksjon som til hver vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ tilordner en vektor $T(\mathbf{x})$ i $\mathbb{R}^m$, slik at følgende er oppfylt:*

*i)* $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ *for alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *i* $\mathbb{R}^n$*;*

*ii)* $T(k\mathbf{x}) = kT(\mathbf{x})$ *for alle* $\mathbf{x}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *og alle skalarer* $k$*.*

Vi skriver ofte

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

for en lineær avbildning $T$ fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$, en skrivemåte vi også har møtt for funksjoner.

Hvis $\mathbf{x}$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$, sier vi gjerne at «$T$ sender $\mathbf{x}$ til $T(\mathbf{x})$», og skriver $T\colon \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x})$.

**Lineær algebra dreier seg i stor grad om å studere lineære avbildninger mellom såkalte *vektorrom*. Vi skal holde oss til studiet av lineære avbildninger fra $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ til $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.** Mer generelle vektorrom studeres blant annet i MAT1120.

Vi ser nå hvorfor teorem 1.6 er et viktig resultat. Det sier nemlig følgende:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Multiplikasjon med en } m \times n\text{-matrise er} \\ \text{en lineær avbildning fra } \mathbb{R}^n \text{ til } \mathbb{R}^m.\end{array}} \tag{1.9}$$

(Overbevis deg selv ved å sammenligne definisjon 1.7 og teorem 1.6.)

**Eksempel 1.8** La $A$ være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siden $A$ er en $2 \times 3$-matrise, får vi at hvis $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, så er $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, og multiplikasjon med $A$ vil gi oss en lineær avbildning fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^2$.

For eksempel vil vektoren $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gi vektoren $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (sjekk!), som er en vektor i $\mathbb{R}^2$. ■

Den første egenskapen vi merker oss ved en lineær avbildning, er at den sender nullvektoren på nullvektoren:

**Teorem 1.9** *La $T$ være en lineær avbildning. Da er $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

*Bevis:* Ved definisjon 1.7 $i$), har vi

$$T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0}) = 2T(\mathbf{0}),$$

og dermed må $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (nullvektoren er den eneste vektoren $\mathbf{v}$ som oppfyller $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$).

*Alternativt:* Det er klart at $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Så ved definisjon 1.7 $ii$) er

$$T(\mathbf{0}) = T(0 \cdot \mathbf{0}) = 0T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \ \square$$

**Eksempel 1.10** La $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ være en vektor i $\mathbb{R}^2$. Avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved $T((x_1, x_2)) = ax_1 + bx_2$ er en lineær avbildning. Det er to måter å vise det på:

*Alternativ 1:* Vi ser at avbildningen $T$ er gitt ved å multiplisere med $1 \times 2$-matrisen $[a\ b]$ (sjekk!), og bruker teorem 1.6, dvs. (1.9).

*Alternativ 2* (Til bruk når man ikke ser/tenker på matrisen i Alternativ 1. Kan også være instruktivt å bruke et par ganger uansett.): Vi sjekker punktene i definisjon 1.7.

Vi lar $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Punkt *i*) gir følgende utregning:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &= T((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) \\ &= a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2) \\ &= ax_1 + bx_2 + ay_1 + by_2 \\ &= T((x_1, x_2)) + T((y_1, y_2)) \\ &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Punkt *ii*) gir utregningen:

$$\begin{aligned} T(k\mathbf{x}) &= T(k(x_1, x_2)) \\ &= T((kx_1, kx_2)) \\ &= a(kx_1) + b(kx_2) \\ &= k(ax_1 + bx_2) \\ &= kT((x_1, x_2)) \\ &= kT(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

og vi har oppfylt begge punktene. ■

Lineær algebra er en stor og meget anvendbar teori, spesielt i de ulike realfagene, og vi skal fortsette å lære mer av denne teorien. Vi innfører først noen flere begreper, slik som *lineære kombinasjoner* og *lineær uavhengighet*.

## 1.6 Lineære kombinasjoner

Vi har allerede møtt begrepet lineær kombinasjon i MAT1001, bl.a. i forbindelse med populasjonsdynamikk, der vi skrev initialvektoren som en lineær kombinasjon av egenvektorer for å si noe om likevektstilstanden til populasjonen. Vi lager lineære kombinasjoner ved å kombinere vektorer på en lineær måte:

**Definisjon 1.11** *Hvis det finnes vektorer* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *og skalarer* $k_1, k_2, \ldots, k_p$ *slik at vektoren* $\mathbf{u}$ *kan skrives som*

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p,$$

*sier vi at* $\mathbf{u}$ *er en lineær kombinasjon av vektorene* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$.

**Eksempel 1.12** Vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en lineær kombinasjon av vektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ siden

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

For å finne ut om en gitt vektor kan skrives som en lineær kombinasjon av noen andre gitte vektorer, ender vi opp med å løse et lineært likningssystem:

**Eksempel 1.13** Vi vil undersøke om vektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Det gir likningen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

som igjen gir likningssystemet

$$\begin{cases} 1 = 3k_1 + 3k_3 \\ 1 = k_1 + k_2 \\ 1 = 2k_2. \end{cases}$$

Dette systemet har (den entydige) løsningen (sjekk!) $(k_1, k_2, k_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$, og dermed kan vi skrive $\mathbf{u}$ som en lineær kombinasjon av de oppgitte vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ (sjekk!):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

■

Vi er ikke garantert å kunne skrive en vektor som en lineær kombinasjon av hvilke som helst vektorer:

**Eksempel 1.14** Vi vil nå undersøke om vektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Det gir likningen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir likningssystemet

$$\begin{cases} 1 = k_1 \\ 1 = 2k_1 - k_2 \\ 1 = 3k_1 + k_2, \end{cases}$$

et system som har ingen løsning (sjekk!). Dette betyr at $\mathbf{u}$ ikke kan skrives som en lineær kombinasjon av de oppgitte vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. ■

I eksempelet ovenfor ser vi at *to* vektorer ikke trenger å være nok til å lage en lineær kombinasjon som skal gi en 3-dimensjonal vektor.

Vi tar også med et eksempel for å vise at selv om vi har «nok» vektorer, er vi fortsatt ikke garantert å kunne skrive en vektor som en lineær kombinasjon av hvilke som helst vektorer (vi skal komme tilbake til en nærmere forklaring på begge eksemplene snart):

**Eksempel 1.15** Vi vil undersøke om vektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Det gir likningen

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

og vi får nå likningssystemet

$$\begin{cases} 3 = k_1 - 2k_2 \\ 2 = -k_1 + 2k_2, \end{cases}$$

som ikke har noen løsning (sjekk!). Dermed kan vi ikke skrive $\mathbf{u}$ som en lineær kombinasjon av de oppgitte vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. ■

Det er nå naturlig å stille spørsmålene «hva skal til for at en gitt vektor kan skrives som en lineær kombinasjon av noen andre gitte vektorer?» og «hvilke vektorer kan skrives som en lineær kombinasjon av en gitt mengde vektorer?»

For å svare på disse spørsmålene gir vi først et navn til mengden av alle lineære kombinasjoner av en gitt mengde vektorer:

**Definisjon 1.16** *La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Mengden av vektorer som kan skrives på formen*

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p$$

*for passende skalarer $k_1, k_2 \ldots, k_p$ kalles* mengden utspent av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$*, og skrives* $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *(fra engelsk «to span», som betyr «å utspenne»).*

Vi har altså

$$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} = \{k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p \ : \ k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{R}\},$$

som gjerne leses «spanet av...» (på engelsk-norsk).

**Bemerkning 1.17** Vi merker oss at:

- Siden $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots 0 \cdot \mathbf{v}_p$, har vi $\mathbf{0} \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$.
- Siden $k\mathbf{v}_i = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_{i-1} + k \cdot \mathbf{v}_i + 0 \cdot \mathbf{v}_{i+1} + \cdots 0 \cdot \mathbf{v}_p$, har vi $k\mathbf{v}_i \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ for $i = 1, \ldots, p$. Dvs. $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ inneholder alle skalare multiplumer av $\mathbf{v}_1$, av $\mathbf{v}_2, \ldots$, og av $\mathbf{v}_p$.

■

**Eksempel 1.18** Vi har

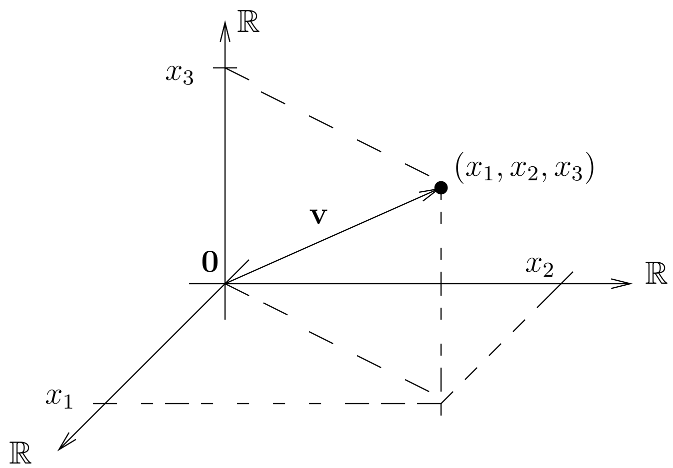
$$\text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\} = \{k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R}\},$$

så for eksempel har vi at

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} \in \text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\}.$$

■

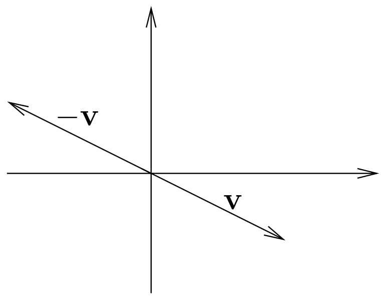
**Vi kan visualisere vektorer i $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, så lenge $\mathbf{n} \leq 3$.** For eksempel kan en vektor $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbb{R}^3$ ses på som et retningsbestemt linjestykke (i rommet) med startpunkt i origo og endepunkt i punktet $(x_1, x_2, x_3)$:



Som vi vet, kan vi se for oss vektorer i $\mathbb{R}^2$ som retningsbestemte linjestykker i planet, med startpunkt i origo.

Når vi multipliserer en vektor $\mathbf{v}$ med en skalar $k$, multipliserer vi inn $k$ i hver av komponentene til $\mathbf{v}$. Dette kan vi visualisere på følgende måte:

- For $k = 1$ forandres ikke vektoren.
- For $k = -1$ får vi vektoren $-\mathbf{v}$, vektoren der retningen snus $180°$, men der lengden beholdes.



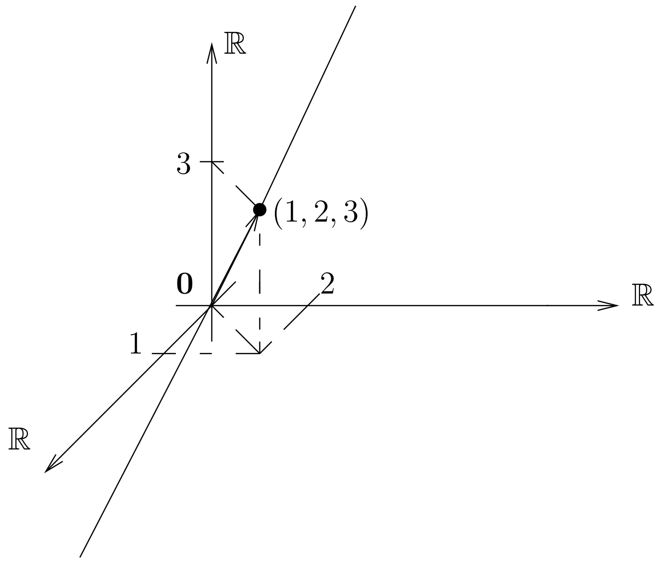

- For $|k| > 1$ forlenges vektoren med en faktor $k$. Hvis $k$ er positiv, beholder vektoren retningen, hvis $k$ er negativ, snus retningen $180°$.
- For $k = 0$ får vi nullvektoren, dvs. origo.
- for $0 < |k| < 1$ forkortes vektoren med en faktor $k$. Hvis $k$ er positiv, beholder vektoren retningen, hvis $k$ er negativ, snus retningen $180°$.

Dette betyr at Span $\mathbf{v}$ kan visualiseres som linja (uendelig mange punkter) *gjennom origo* med retningsvektor $\mathbf{v}$. Hvis $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, ligger linja i planet, og hvis $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, ligger linja i rommet.

**Eksempel 1.19** Vi har

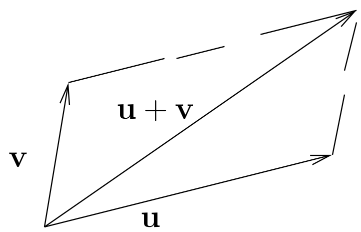
$$\text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\} = \{k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R}\}.$$

Denne mengden kan visualiseres som linja i $\mathbb{R}^3$ gjennom origo med retningsvektor $(1, 2, 3)$:

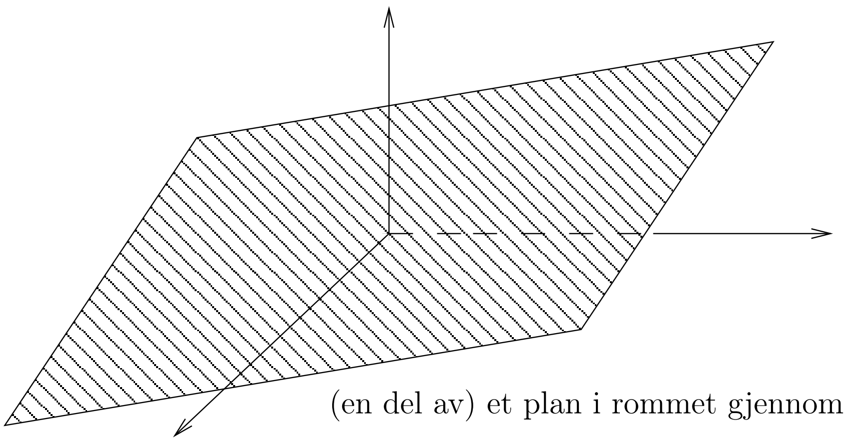



(Selv om det kan være vanskelig å være helt nøyaktig i slike tegninger, overbevis deg om at for eksempel punktet $(-2,-4,-6)$ ligger på linja.) ■

Videre vet vi at vektorer adderes koordinatvis. Hvis to vektorer ikke er et skalart multiplum av hverandre, dvs. de er ikke parallelle, får vi dermed at summen av to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ geometrisk kan ses på som diagonalen i parallellogrammet *utspent av* $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$:




Mengden Span$\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ der $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er to *ikke-parallelle* vektorer kan visualiseres som et plan (uendelig mange punkter) *gjennom origo*. Alle vektorer i et slikt plan kan altså skrives som en lineær kombinasjon av de to vektorene som utspenner det. Hvis $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ vil vi få hele $\mathbb{R}^2$ (som du vil se når vi kommer til begrepet *basis*), og hvis $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, ligger planet i rommet (husk at planet fortsetter i det uendelige i alle retninger, dvs. det er ikke bare et parallellogram):



(en del av) et plan i rommet gjennom origo

Prøv gjerne å tegne et plan i rommet gjennom to gitte vektorer på et papir (det kan ta litt tid, men det kan være lurt å ha gjort det en gang). Du vil se at hellingen på planet vil avhenge av vektorene (du kan også se det for deg ved å bruke håndbevegelser ut i lufta).

Vi tar et eksempel i planet:

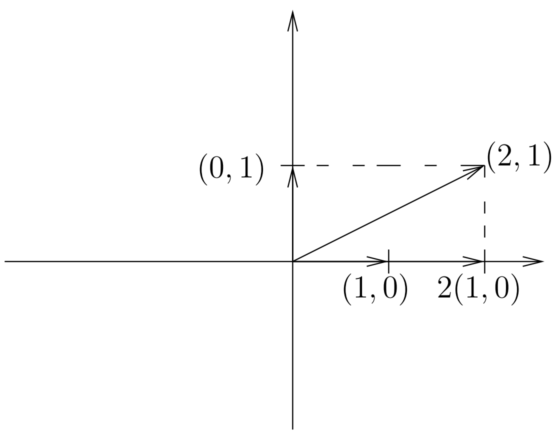
**Eksempel 1.20** Siden vi har den lineære kombinasjonen

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har vi

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Span}\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

Tegningen er:



Overbevis deg selv om at *alle* vektorer i $\mathbb{R}^2$ ligger i Span$\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$, og at vi har at Span$\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\} = \mathbb{R}^2$. ■

Ved hjelp av definisjon 1.16 kan vi nå omformulere spørsmålene våre. Hvis vi ønsker å finne ut om en vektor $\mathbf{u}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$, spør vi:

«Er $\mathbf{u}$ med i mengden Span$\{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$?» For å gi svar på det må vi undersøke om vektorlikningen

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p$$

har løsninger.

For å svare på det må vi løse likningssystemet med utvidet matrise

$$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_p \ \mathbf{u}] \,.$$

**Eksempel 1.21** Vi er gitt vektorene $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, og ønsker å vite om vektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er med i Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. For å svare på dette må vi undersøke om vektorlikningen

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_\mathbf{2}$$

har løsninger. Dermed må vi løse likningssystemet med utvidet matrise

$$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

og radredusere denne for å finne eventuelle løsninger. Overbevis deg om at dette likningssystemet har ingen løsning, dvs. at $\mathbf{u}$ <u>ikke</u> er med i Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(Vi kan også sammenligne dette med Eksempel 1.14, der vi stilte spørsmålet på en annen måte: Vi ville vite om vektoren $\mathbf{u}$ kunne skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, noe vi ikke kunne.)

Geometrisk kan dette visualiseres ved at $\mathbf{u}$ <u>ikke</u> ligger i planet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. ■

Vi tar med et eksempel med positivt svar:

**Eksempel 1.22** Se på vektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi vil undersøke om $\mathbf{u}$ er med i $\text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}\}$. Det gir vektorlikningen

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

og vi får likningssystemet med utvidet matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Radoperasjonen «$(-1) \cdot R_1$ til $R_2$» gir matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -2 \end{bmatrix},$$

og vi ser at vi vil få to ledende 1-ere, dvs. systemet har en løsning, og $\mathbf{u}$ er med i $\text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}\}$.

Ved å radredusere matrisen til redusert trappeform, finner vi for øvrig løsningen (sjekk!) $(k_1, k_2) = (\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$, dvs.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \tfrac{7}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser videre at hvis vektoren $\mathbf{v}$ er en generell vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$, vil vi også ha $\mathbf{v} \in \text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}\}$: Vi får i dette tilfellet den reduserte matrisen (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & a \\ 0 & -6 & -a+b \end{bmatrix},$$

som vil gi to ledende 1-ere uavhengig av hva $a$ og $b$ er. Vi får derfor at

$$\text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}\} = \mathbb{R}^2.$$

■

## 1.7 Lineær uavhengighet

Et begrep som henger nært sammen med lineære kombinasjoner, er *lineær avhengighet*. At to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært avhengige vil si at minst en av vektorene kan utspennes lineært av den andre, dvs. $\mathbf{u} \in \text{Span}\{\mathbf{v}\}$ <u>eller</u> $\mathbf{v} \in \text{Span}\{\mathbf{u}\}$. De er med andre ord parallelle vektorer. Merk at nullvektoren er parallell med alle vektorer $\mathbf{u}$ siden $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{u}$.

At tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært avhengig vil si at de lever i et lineært avhengighetsforhold. Mer presist betyr det at minst en av vektorene kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av de andre to:

**Eksempel 1.23** Vektorene $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er lineært avhengige fordi vi for eksempel har at

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Her har vi også at

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

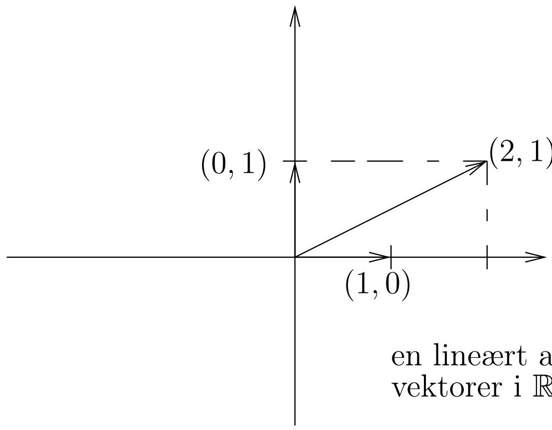
Dette betyr for øvrig også at vi har oppfylt vektorlikningen

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

som også kan skrives som

$$\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Geometrisk ser vi den lineære avhengigheten på følgende måte: Vi har tre vektorer i $\mathbb{R}^2$, og vi har sett at to ikke-parallelle slike vektorer er nok til å utspenne $\mathbb{R}^2$. Dermed vil ethvert par av disse vektorene utspenne $\mathbb{R}^2$, mens den tredje vektoren vil ligge i planet som allerede er utspent.




en lineært avhengig mengde vektorer i $\mathbb{R}^2$

■

I eksempelet ovenfor kunne hver av vektorene utrykkes som en lineær kombinasjon av de andre to. Generelt holder det altså at *minst* en av vektorene er en lineær kombinasjon av de andre to for at tre vektorer er lineært avhengige:

**Eksempel 1.24** Vektorene $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er også lineært avhengige siden

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har også at

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

men $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er <u>ikke</u> en lineær kombinasjon av $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ (sjekk!).

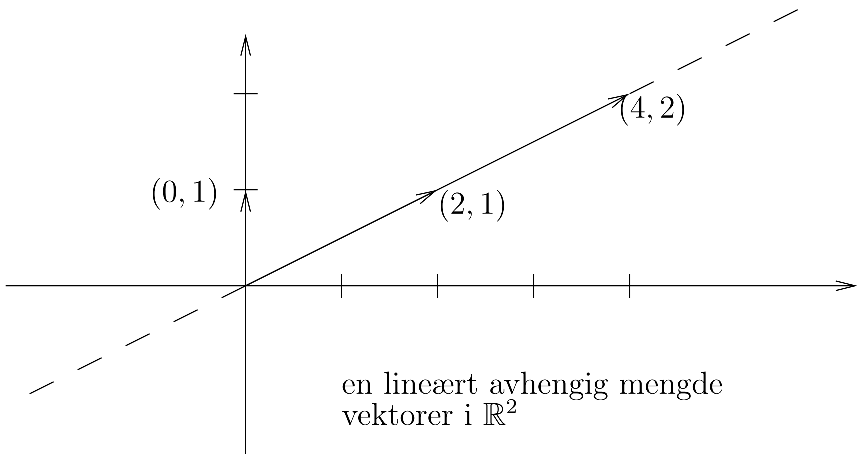
Uansett, vi har oppfylt vektorlikningen

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

som også kan skrives som

$$-2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Geometrisk kan vi se at $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ikke er en lineær kombinasjon av $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ fordi de to sistnevnte vektorene er parallelle, og de utspenner en linje som ikke inneholder $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:




■

At en vektor kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av noen andre vektorer gir oss en vektorlikning. Ved å flytte alle ledd i denne likningen over på venstre side, får vi en homogen likning som har en ikke-triviell løsning (som i eksemplene ovenfor). Dermed kan vi gi følgende definisjon av lineær avhengighet for $p$ vektorer:

**Definisjon 1.25** *Mengden* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *av* $p$ *forskjellige vektorer i* $\mathbb{R}^n$ *kalles lineært avhengig hvis det fins skalarer* $k_1, k_2 \ldots, k_p$*, som ikke alle er lik 0, slik at*

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}. \tag{1.10}$$

*Vektorlikningen (1.10) kalles en lineær avhengighetsrelasjon mellom vektorene* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$.

Det motsatte begrepet, nemlig *lineær uavhengighet*, vil være vel så viktig for oss (vi kaller nå skalarene for $x_i$):

**Definisjon 1.26** *Mengden* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *av* $p$ *forskjellige vektorer i* $\mathbb{R}^n$ *kalles lineært uavhengig dersom den ikke er lineært avhengig. Dette betyr at vektorlikningen*

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \tag{1.11}$$

*kun har den trivielle løsningen* $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$.

Hvis mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er lineært uavhengig sier vi at «vektorene er lineært uavhengige».

**Eksempel 1.27** I eksempel 1.23 så vi at vektorene $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er lineært avhengige, siden vektorlikningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{1.12}$$

har andre løsninger enn den trivielle løsningen, for eksempel $(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, -1)$ og $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2})$.

(Vi ser for øvrig at vektorlikningen (1.12) har uendelig mange løsninger gitt ved 3-tuplene $\{(s, -2s, -s) \colon s \in \mathbb{R}\}$.) ■

Ved nok en gang å utnytte de ulike synspunktene på et lineært liknings-system, får vi en metode for å sjekke om en mengde vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er lineært uavhengig:

Vi danner matrisen $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_p]$, dvs. $A$ er matrisen med vektorene $\mathbf{v}_i$ som kolonner. Hvis kolonnene er lineært uavhengige, skal vektorlikningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ kun ha den trivielle løsningen, dvs. at likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ skal kun ha løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

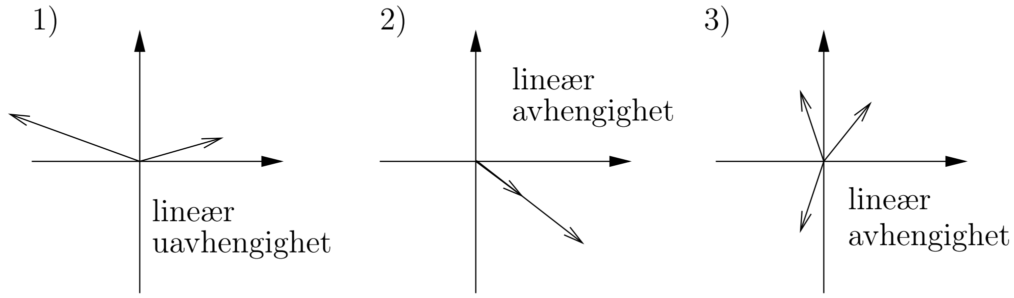
Dette gir også følgende resultat:

**Teorem 1.28** *Kolonnene i en matrise $A$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsningen.*

Som vi ser, ender vi stadig opp med å skulle løse lineære likningssystemer, så radredusering av matriser er en ferdighet vi får holdt ved like.

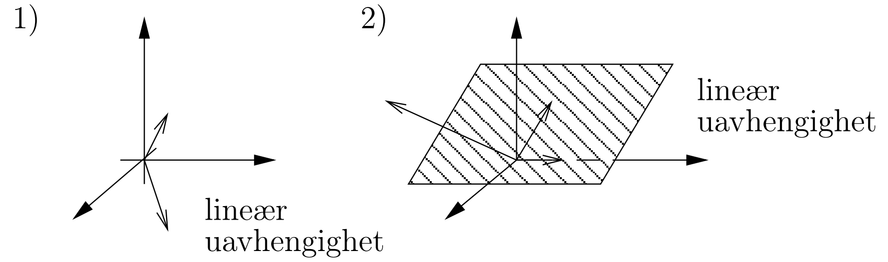
Vi kan også visualisere lineær avhengighet/uavhengighet i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ (tenk litt på disse tegningene!):

I $\mathbb{R}^2$ har vi følgende tilfeller (for to eller flere vektorer):



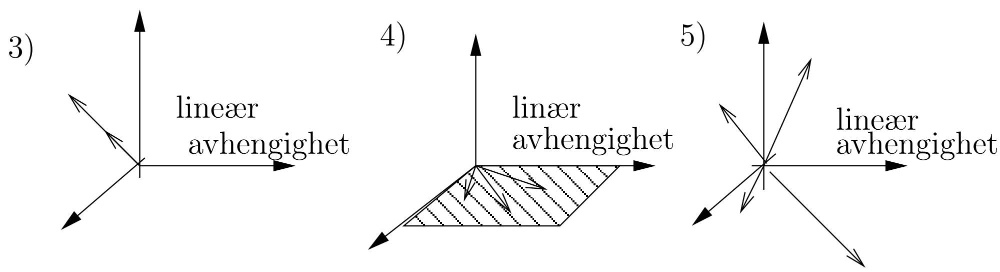

1) to ikke-parallelle vektorer er lineært uavhengige
2) parallelle vektorer er lineært avhengige
3) flere enn to vektorer er lineært avhengige

I $\mathbb{R}^3$ har vi følgende tilfeller (for to, tre eller flere vektorer):




1) to ikke-parallelle vektorer er lineært uavhengige

2) tre vektorer der to av vektorene utspenner et plan
som ikke inneholder den tredje vektoren er lineært uavhengige




3) parallelle vektorer er lineært avhengige

4) tre vektorer som ligger i samme plan er lineært avhengige

5) flere enn tre vektorer er lineært avhengige

**Eksempel 1.29** Vi vil undersøke om vektorene $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (2, 1, 1)$ og $\mathbf{v}_3 = (4, 1, 2)$ er lineært uavhengige. Vi setter opp matrisen

$$A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen kan radreduseres til (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dvs. at vi har tre ledende 1-ere, som betyr at det homogene likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dermed er vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært uavhengige.

Geometrisk har vi at to av vektorene utspenner et plan i rommet som ikke inneholder den tredje vektoren, og til sammen vil de utspenne hele $\mathbb{R}^3$. Overbevis deg selv om at

$$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^3.$$

■

Legg merke til at matrisen $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_p]$ ikke nødvendigvis er kvadratisk; for eksempel hvis vi vil sjekke om to vektorer i $\mathbb{R}^3$ er lineært uavhengige, vil vi få en $3 \times 2$-matrise.

For å utspenne $\mathbb{R}^n$ er det slik at vi må alltid ha minst $n$ forskjellige vektorer. På den andre siden har vi sett (når $n = 2$ eller $n = 3$) at hvis vi har flere vektorer enn $n$, vil disse vektorene i $\mathbb{R}^n$ være lineært avhengige. Dermed ender vi opp med tilfellet der vi har like mange vektorer som dimensjon til rommet, dvs. vi har $n$ vektorer i $\mathbb{R}^n$:

Det at (nøyaktig) $n$ vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige svarer til at matrisen $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n]$ kan radreduseres til identitetsmatrisen

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dermed vil spesielt *kolonnevektorene til $I_n$ være lineært uavhengige*. Disse vektorene har en egen notasjon: Vi skriver $I_n = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \cdots\ \mathbf{e}_n]$, dvs.

$$\boxed{\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.} \tag{1.13}$$

Neste eksempel gir oss en overgang til neste seksjon:

**Eksempel 1.30** Vektorene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ er lineært uavhengige. Videre har vi at enhver vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ er med i $\text{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, dvs. at enhver vektor kan skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$, siden

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi skal i neste seksjon se at disse to egenskapene som $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ har er viktige. Mengden $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ er en såkalt *basis* for $\mathbb{R}^3$. ■

## 1.8 Underrom av $\mathbb{R}^n$, nullrom, og begrepet *basis*

Vi kjenner rommet $\mathbb{R}^n$ som mengden av alle $n$-dimensjonale vektorer som oppfyller regnereglene i teorem 1.2. Vi tenker geometrisk på $\mathbb{R}$ som tallinja (1-dimensjonal), $\mathbb{R}^2$ som planet (2-dimensjonalt), og $\mathbb{R}^3$ som rommet (3-dimensjonalt). Og som vi vet lar vi oss ikke skremme av rom med 4, 5, 6 osv. dimensjoner, selv om vi ikke kan se dette for oss geometrisk. Vi kan fortsatt *regne* med vektorer i slike rom.

Et nyttig begrep er såkalte *underrom* av $\mathbb{R}^n$. Vi kan i første omgang tenke på det som et mindre rom liggende i det større rommet $\mathbb{R}^n$. I tillegg må dette mindre rommet oppføre seg «pent», slik $\mathbb{R}^n$ gjør med hensyn på regnereglene, dvs. det mindre rommet må også ha en lineær struktur. Mer presist definerer vi:

**Definisjon 1.31** *Et underrom av* $\mathbb{R}^n$ *er en delmengde* $U$ *av* $\mathbb{R}^n$ *som oppfyller følgende tre egenskaper:*

*i)* *Vi har* $\mathbf{0} \in U$ *(nullvektoren er med i* $U$*).*

*ii)* *Hvis* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$ *er i* $U$*, så er* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *i* $U$ *(vi sier at «*$U$ *er lukket under addisjon»).*

*iii)* *Hvis* $\mathbf{u}$ *er i* $U$ *og* $k$ *er en skalar, er* $k\mathbf{u}$ *i* $U$ *(vi sier at «*$U$ *er lukket under skalar multiplikasjon»).*

**Eksempel 1.32** En linje $\ell$ gjennom origo med stigningstall $a$ består av alle punkter $(s, as)$ i $\mathbb{R}^2$ der $s \in \mathbb{R}$. Vi vil vise at $\ell$ er et underrom av $\mathbb{R}^2$.

Vi tenker på punktet $(s, as)$ som vektoren som starter i origo og ender i punktet $(s, as)$, dvs. en vektor som ligger på linja $\ell$. For å vise at $\ell$ er et underrom av $\mathbb{R}^2$, må vi sjekke at punktene $i), ii)$ og $iii)$ i definisjon 1.31 er oppfylt:

*i)* Ved å velge $s = 0$, ser vi at $(0, 0) = \mathbf{0}$ er i $\ell$ (siden linja går gjennom origo).

*ii)* Hvis $\mathbf{u} = (s, as)$ og $\mathbf{v} = (t, at)$, er

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (s, as) + (t, at) = ((s + t), a(s + t)),$$

som er et punkt på $\ell$ (summen av to punkter på $\ell$ er et punkt som fortsatt ligger på $\ell$).

*iii)* Hvis $\mathbf{u} = (s, as)$, så er

$$k\mathbf{u} = (ks, kas) = ((ks), a(ks)),$$

som igjen er et punkt på $\ell$ (vi forlenger/forkorter $\mathbf{u}$).

Vi har dermed vist at en linje gjennom origo er et underrom av $\mathbb{R}^2$. ■

**Eksempel 1.33** En linje $\ell$ gitt ved likningen $y = ax + b$ der $b \neq 0$, dvs. en linje som ikke går gjennom origo, vil ikke danne et underrom av $\mathbb{R}^2$. En av grunnene er at nullvektoren ikke ligger på linja, dvs. punkt *i*) i definisjon 1.31 er ikke oppfylt. (For øvrig er punktene *ii*) og *iii*) heller ikke oppfylt - prøv og overbevis deg selv om det!). ■

En grunn til at vi innførte begrepet Span er følgende resultat:

**Teorem 1.34** *La* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *være vektorer i* $\mathbb{R}^n$. *Da er* $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *et underrom av* $\mathbb{R}^n$.

*Bevis:* Vi må sjekke at $U = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ oppfyller punktene i definisjon 1.31.

Bemerkning 1.17 gir punktene *i*) og *iii*) (sjekk!). For punkt *ii*) har vi følgende utregning: La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. Vi skriver $\mathbf{u} = s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 + \cdots + s_p\mathbf{v}_p$ og $\mathbf{v} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_p\mathbf{v}_p$. Da er

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (s_1 + t_1)\mathbf{v}_1 + (s_2 + t_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (s_p + t_p)\mathbf{v}_p,$$

så $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. □

**Eksempel 1.35** I eksempel 1.32 viste vi at en linje $\ell\colon y = ax$ i $\mathbb{R}^2$ gjennom origo er et underrom av $\mathbb{R}^2$. Dette kunne vi også ha vist ved å si at $\ell = \text{Span}\{\mathbf{v}\}$ der $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$, og deretter referert til teorem 1.34. ■

**Bemerkning 1.36** Vi merker oss følgende:

- Mengden $U = \{\mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$ (sjekk!). Dette kalles *det trivielle underrommet*.
- Rommet $\mathbb{R}^n$ er et underrom av seg selv.

■

Underrom av $\mathbb{R}^n$ relateres gjerne til matriser. Vi skal få bruk for det såkalte *nullrommet* til en matrise. Igjen setter vi sammen kjente ting som lineære avbildninger og lineære likningssystemer:

Vi vet at å multiplisere med en $m \times n$-matrise $A$ er en lineær avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$, og at slike avbildninger sender $\mathbf{0}$ på $\mathbf{0}$, noe som svarer til at $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Vi vet også at et homogent lineært likningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kan ha flere (uendelig mange) løsninger enn bare $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi skal se at mengden av disse løsningene vil gi oss et underrom av $\mathbb{R}^n$.

**Definisjon 1.37** *Nullrommet til en matrise $A$ er løsningsmengden til det homogene likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi skriver* $\operatorname{Nul} A$ *for denne mengden, dvs.*

$$\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{x} \,:\, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Vi finner altså $\operatorname{Nul} A$ ved å løse likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

**Eksempel 1.38** Vi vil finne nullrommet til matrisen $A$ gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Liknngssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har utvidet matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

som kan radreduseres til (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Løsningsmengden til systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er dermed gitt ved vektorene på formen (sjekk!)

$$s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

der $s \in \mathbb{R}$. Det betyr at

$$\text{Nul}\, A = \{s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ : \ s \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

■

Vi kan sjekke om en vektor $\mathbf{x}$ er med i $\text{Nul}\, A$ ved å sjekke om $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

**Eksempel 1.39** Vi vil undersøke om vektoren $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ er med i $\text{Nul}\, A$ der

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi regner ut

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

som er forskjellig fra $\mathbf{0}$, så $\mathbf{x} \notin \text{Nul}\, A$. ■

**Teorem 1.40** *La $A$ være en $m \times n$-matrise. Da er* $\text{Nul}\, A$ *et underrom av* $\mathbb{R}^n$.

*Bevis:* Multiplikasjon med $m \times n$-matrisen $A$ gir en lineær avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$, dvs. at mengden $\text{Nul}\, A = \{\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ vil være en delmengde av $\mathbb{R}^n$.

Vi må sjekke at $U = \text{Nul}\, A$ oppfyller punktene $i) - iii)$ i definisjon 1.31:

*i)* Siden $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, har vi at $\mathbf{0} \in \text{Nul}\, A$.

*ii)* Hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Nul}\, A$, er $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Siden multiplikasjon med $A$ er en lineær avbildning, har vi

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

så $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Nul}\, A$.

*iii)* Hvis $\mathbf{u} \in \operatorname{Nul} A$, er $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Siden multiplikasjon med $A$ er en lineær avbildning, har vi

$$A(k\mathbf{u}) = k(A\mathbf{u}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

så $k\mathbf{u} \in \operatorname{Nul} A$ for $k$ en skalar.

Siden alle krav til et underrom er oppfylt, har vi vist at $\operatorname{Nul} A$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$. $\square$

**Eksempel 1.41** I eksempel 1.38 hadde vi matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

som er en $2 \times 3$-matrise. Vi så at

$$\operatorname{Nul} A = \{s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\} = \operatorname{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\},$$

som er et underrom av $\mathbb{R}^3$ (en linje i $\mathbb{R}^3$). $\blacksquare$

Vi kan nå innføre begrepet basis. Det gjør vi ved å sette sammen begrepene å utspenne / lineære kombinasjoner, lineær uavhengighet og underrom:

**Definisjon 1.42** *La $U$ være et underrom av $\mathbb{R}^n$ og la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ være vektorer i $U$. Mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ kalles en basis for $U$ hvis vi har oppfylt følgende to egenskaper:*

*i) Mengden er lineært uavhengig;*

*ii)* $\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\} = U$.

Når vi har en basis for $U$ har vi altså «nok» lineært uavhengige vektorer til å utspenne rommet.

Vi ser først på tilfellet der $U = \mathbb{R}^n$. «Nok» lineært uavhengige vektorer til å utspenne $\mathbb{R}^n$ vil være $n$ (noe vi har sett flere eksempler på for $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$):

**Teorem 1.43** *La $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en lineært uavhengig mengde av vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da vil $\mathcal{B}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$.*

La oss kort forklare hvorfor vi kan uttrykke enhver vektor i $\mathbb{R}^n$ ved hjelp av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Vi danner matrisen $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n]$. Siden kolonnene er lineært uavhengige vet vi at $A$ kan radreduseres til $I_n$, som videre betyr at ethvert likningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vil ha nøyaktig en løsning. Dermed vil det finnes entydig bestemte skalarer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slik at

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{b}.$$

Vi har dermed følgende:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Når vi har en basis } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \text{ for } \mathbb{R}^n,\\ \text{kan vi skrive enhver vektor i } \mathbb{R}^n \text{ som}\\ \text{en lineær kombinasjon av } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\\ \text{på en entydig måte.}\end{array}} \tag{1.14}$$

Dette skal vi få god bruk for!

La oss først holde løftet vårt om å oppklare et par eksempler vi har sett tidligere i kompendiet:

**Eksempel 1.44** Ta en titt på eksempel 1.14 og eksempel 1.15 en gang til: I disse eksemplene kunne vi ikke skrive en gitt vektor som en lineær kombinasjon av gitte vektorer.

I eksempel 1.14 har vi ikke nok vektorer til å utspenne $\mathbb{R}^3$, dvs. vi har at $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \neq \mathbb{R}^3$. De oppgitte vektorene danner altså ikke en basis, og vi kan dermed ikke garantere at alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ skal kunne skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

I eksempel 1.15 er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ lineært avhengige, så $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \neq \mathbb{R}^2$, og vi kan dermed ikke garantere at alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ skal kunne skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. ■

Når det gjelder å finne basiser for $\mathbb{R}^n$, har vi allerede møtt en lineært uavhengig mengde av $n$ vektorer i $\mathbb{R}^n$, nemlig mengden $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (se (1.13)).

**Definisjon 1.45** *Mengden $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ kalles standardbasisen til $\mathbb{R}^n$.*

**Bemerkning 1.46** Elementene i standardbasisen til $\mathbb{R}^2$ kalles noen ganger også for $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$, mens for $\mathbb{R}^3$ kalles de også $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$. ■

**Eksempel 1.47** Standardbasisen til $\mathbb{R}^2$ er vektorene $\mathbf{i} = \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{j} = \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En annen basis for $\mathbb{R}^2$ vil bestå av to lineært uavhengige vektorer, for eksempel $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Enhver vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ kan skrives som en lineær kombinasjon av disse basisene på en entydig måte. Du kan sjekke at

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(vi ser hvorfor standardbasisen er ekstra lett å ha med å gjøre) og at

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \tfrac{3a+b}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \tfrac{-2a+b}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(finn koeffisientene ved å løse et likningssystem). ■

Vi tar med et par eksempler der vi finner en basis for en linje og et plan:

**Eksempel 1.48** Linja $\ell$ i $\mathbb{R}^2$ gitt ved $\ell\colon\ y = 5x$ går gjennom origo, og $\ell$ danner dermed et underrom av $\mathbb{R}^2$. Linja er utspent av vektoren $(1, 5)$ og mengden $\{(1, 5)\}$ er lineært uavhengig, så en basis for $\ell$ er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$.

For øvrig vil enhver vektor på formen $s\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$ for en eller annen $s \neq 0$ utgjøre en basis for $\ell$, så en annen basis kan være $\left\{\begin{bmatrix}-1/2\\-5/2\end{bmatrix}\right\}$. ■

**Eksempel 1.49** Likningen $x+y-z=0$ gir oss et plan $\alpha$ gjennom origo i $\mathbb{R}^3$, som således vil danne et underrom av $\mathbb{R}^3$. La oss finne en basis for dette planet:

Vi kan parameterfremstille planet ved å innføre parametere for to av variablene, for eksempel $y=s$ og $z=t$. Det gir $x=-s+t$, og parameterfremstillingen

$$\{(x,y,z)=(-s+t,s,t)\ :\ s,t\in\mathbb{R}\}.$$

På matriseform får vi

$$\left\{\begin{bmatrix}-s+t\\s\\t\end{bmatrix}\ :\ s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\ :\ s,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Vi påstår nå at vektorene

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\quad \text{og } \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

danner en basis for planet $\alpha$. Vi må sjekke at vektorene oppfyller punktene $i)-ii)$ i definisjon 1.42:

*i)* Vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige: Dette følger siden vektorene ikke er parallelle (sjekk!), men vi merker oss også følgende alternativ: For at å vise at vektorene er lineært uavhengige, må vi sjekke at likningen

$$k_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

kun har løsningen $k_1=k_2=0$, og det stemmer: På grunn av 0-en i 2. rad i $\mathbf{v}$, får vi $k_1=0$, og 0-en i 3. rad i $\mathbf{u}$ gir $k_2=0$.

*ii)* Fra matriseformen ovenfor ser vi at alle punktene i planet $\alpha$ fås som lineære kombinasjoner av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, dvs. $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ gir oss hele planet $\alpha$.

Vi har dermed funnet en basis for planet $\alpha$. Ved å bruke en annen parameterfremstilling, kan vi finne en annen basis.

NB! Merk også at planet $\alpha$ er nullrommet til $1 \times 3$-matrisen $[1\ 1\ \ -1]$.
■

Vår bemerkning på slutten av forrige eksempel kan være grei å ha i bakhodet når du leser neste eksempel, der vi finner en basis for nullrommet til en matrise:

**Eksempel 1.50** Vi vil finne en basis for nullrommet til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vi finner nullrommet til $A$ ved å løse likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Den utvidede matrisen kan radreduseres til matrisen (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Løsningsmengden, og dermed nullrommet til $A$, er (sjekk!)

$$\text{Nul}\, A = \left\{ \begin{bmatrix} -s-4t \\ -s-5t \\ s \\ t \end{bmatrix} \ : \ s, t, \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ : \ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vi ser at $\text{Nul}\, A$ utspennes av vektorene

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og disse er lineært uavhengige (sjekk ved å bruke samme teknikk som i forrige eksempel!). Dermed har vi funnet en basis for $\mathrm{Nul}\, A$ bestående av vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. ■

**Bemerkning 1.51** Vi merker oss at når vi bruker metoden i eksempel 1.50 for å finne $\mathrm{Nul}\, A$, vil vektorene vi leser ut av matriseformen automatisk være lineært uavhengige (tenk over dette!). Dermed gir altså disse vektorene oss en basis for $\mathrm{Nul}\, A$. ■

Vi tar også med følgende begrep:

**Definisjon 1.52** *La $U$ være et underrom av $\mathbb{R}^n$. Antall elementer i en basis for $U$ kalles dimensjonen til $U$, og skrives* $\dim(U)$.

**Bemerkning 1.53** For $U = \{\mathbf{0}\}$, det trivielle underrommet, setter vi $\dim(U) = 0$. ■

Dimensjonen til $\mathbb{R}^n$ er altså $n$. Definisjonen stemmer fint med vår intuisjon om at en linje er 1-dimensjonal (underrom utspent av ett basiselement) og et plan er 2-dimensjonalt (underrom utspent av to basiselementer).

Definisjonen passer også godt med det vi har sett i MAT1001, der vi kalte antall frie variabler i løsningsmengden for dimensjonen til løsningsmengden (se side 69 i *Matematisk verktøykasse*).

**Eksempel 1.54** I eksempel 1.50 er $\dim(\mathrm{Nul}\, A) = 2$, siden nullrommet til matrisen i dette eksempelet har to basiselementer. ■

## 1.9 Mer om lineære avbildninger - visualisering

Vi returnerer nå til studiet av lineære avbildninger fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$. Vi har sett at multiplikasjon med en $m \times n$-matrise $A$ er en lineær avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$. Vi skal straks se at <u>alle</u> lineære avbildninger fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ fås ved å multiplisere med en passende $m \times n$-matrise! Dermed kan vi studere lineære avbildninger ved å studere matriser.

For å finne matrisen til en lineær avbildning, vil vi få god bruk for (1.14). La oss ta et eksempel der vi har gitt matrisen til avbildningen:

**Eksempel 1.55** Vi har den lineære avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved å multiplisere med matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hvis $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, har vi

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b + 5c \\ 3b - c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Vi skal nå se at ved å skrive $\mathbf{v}$ som en *lineær* kombinasjon, kan vi si noe mer om sammenhengen mellom den *lineære* avbildningen og matrisen. Vi velger oss dermed en basis for $\mathbb{R}^3$, og siden standardbasisen er lettest å jobbe med, bruker vi den. Vi får den lineære kombinasjonen

$$\mathbf{v} = a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3.$$

Nå kommer lineariteten til sin fulle rett! Siden $T$ er en lineær avbildning, får vi nemlig at

$$T(\mathbf{v}) = T(a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3) = a\,T(\mathbf{e}_1) + b\,T(\mathbf{e}_2) + c\,T(\mathbf{e}_3).$$

Vi ser at $T(\mathbf{v})$ er en lineær kombinasjon av vektorene $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)$ og $T(\mathbf{e}_3)$.

Disse er ekstra greie å regne ut:

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $T(\mathbf{e}_i)$ plukker ut den $i$-te kolonnen i $A$ (tenk over dette!), dvs. vi har

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ T(\mathbf{e}_3)].$$

Dette betyr igjen at hvis vi vet hva $T$ gjør med basiselementene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$, så finner vi matrisen $A$ til avbildningen. ■

Vi har følgende resultat som setter sammen mye av det vi har sett til nå:

**Teorem 1.56** *La $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær avbildning. Da fins det en entydig $m \times n$-matrise $A$ slik at*

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \textit{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

*Matrisen $A$ er gitt ved*

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \cdots\ T(\mathbf{e}_n)], \tag{1.15}$$

*og kalles standardmatrisen til den lineære avbildningen $T$.*

*Bevis:* La $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$ og skriv $\mathbf{x}$ som en lineær kombinasjon av standardbasisen, dvs.

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Vi får

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) \\
&= [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \cdots\ T(\mathbf{e}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \cdots\ T(\mathbf{e}_n)]\mathbf{x},
\end{aligned}$$

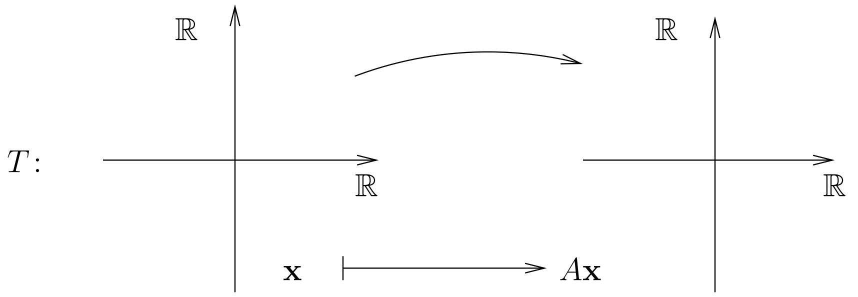
så $T(\mathbf{x})$ er gitt ved å multiplisere $\mathbf{x}$ med matrisen $[T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \cdots\ T(\mathbf{e}_n)]$, og vi får $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ der $A$ er $m \times n$-matrisen gitt ved

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \cdots\ T(\mathbf{e}_n)]. \qquad \square$$

**Bemerkning 1.57** På grunn av teorem 1.56 kalles en lineær avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ også en *matriseavbildning*. ■

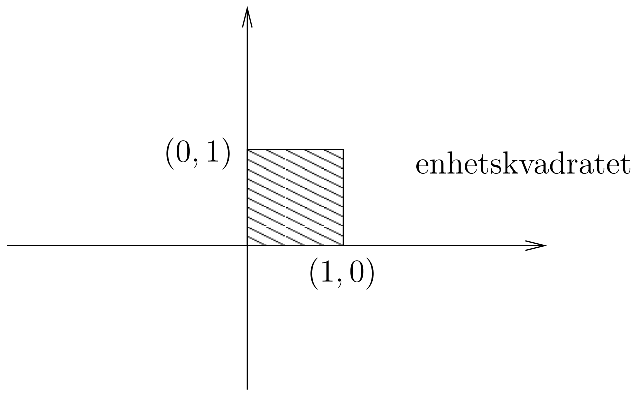
Den lineære strukturen og basisbegrepet gjør oss altså i stand til å studere lineære avbildninger ved hjelp av matriser. Vi kan nå utnytte teorem 1.56 til å visualisere en del lineære avbildninger fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$:

Siden vår geometriske visualiseringsevne stopper etter tre dimensjoner, vil vi kun kunne se for oss hva som skjer når $n$ og $m$ er mindre eller lik 3. Vi skal spesielt ta for oss lineære avbildninger fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$:




der $A$ er en $2 \times 2$-matrise

Når vi skal visualisere $T$, er det ganske opplysende å tegne et bilde av hva som skjer med *enhetskvadratet*, dvs. kvadratet utspent av standardbasisen:




Husk også at en lineær avbildning må sende nullvektoren på nullvektoren, så det nederste hjørnet til venstre i kvadratet (origo) vil alltid ligge i ro under en lineær avbildning.

**Eksempel 1.58** Avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som fordobler alle vektorer, dvs. $T(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$, er lineær ved definisjon 1.7: hvis vi fordobler en sum av to vektorer er det det samme som å fordoble hver vektor og så legge dem sammen, og vektoren $k\mathbf{v}$ fordobles til $2k\mathbf{v}$.

Ved teorem 1.56 har $T$ en standardmatrise $A$. For å finne $A$, regner vi ut hva $T$ gjør med standardbasisen:

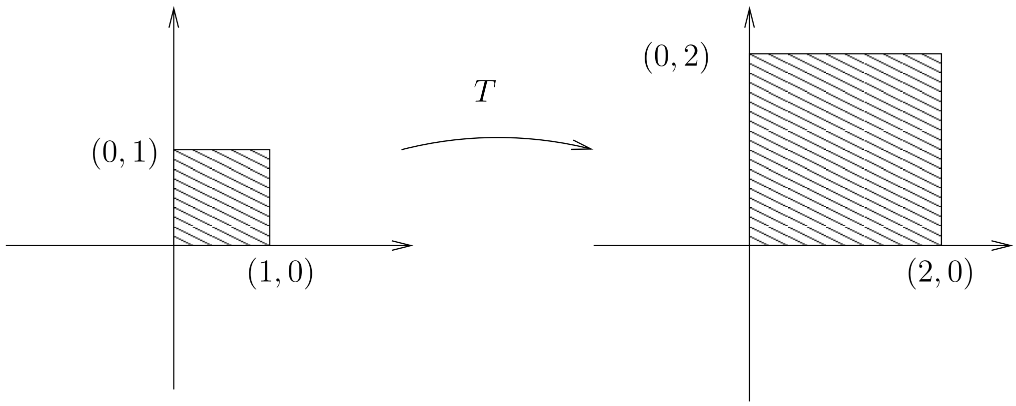
$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T((1,0)) = 2(1,0) = (2,0) \\ T(\mathbf{e}_2) &= T((0,1)) = 2(0,1) = (0,2). \end{aligned}$$

Ved teorem 1.56 får vi $A$ ved å bruke disse vektorene som kolonnevektorer, så dermed har vi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

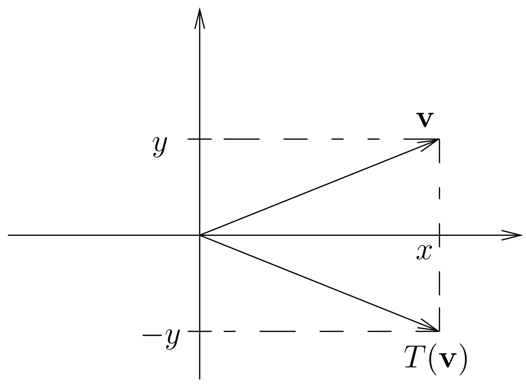
Ved å multiplisere en vektor med $A$, fordobles vektoren (sjekk!).

Bilde av enhetskvadratet:




■

**Eksempel 1.59** (Speiling) Vi skal nå se på avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbilder enhver vektor på sitt speilbilde om $x$-aksen:




Dette er en lineær avbildning ved definisjon 1.7: hvis vi speiler en sum av to vektorer om $x$-aksen er det det samme som å først speile vektorene og så ta summen av disse, og hvis vi speiler vektoren $k\mathbf{v}$ om $x$-aksen, får vi $k$ multiplisert med den speilede vektoren.

Vi kan dermed finne standardmatrisen $A$ til $T$. Siden speilingen er om $x$-aksen, har vi (sjekk!)

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

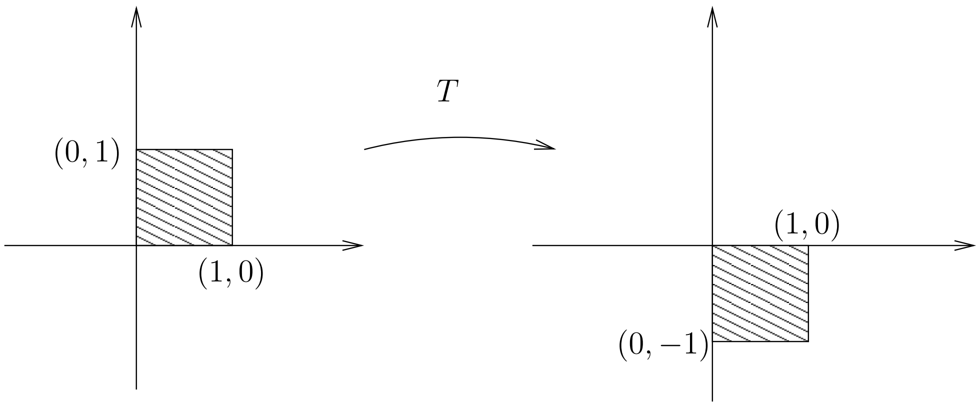
Vi får $A$ ved å bruke disse vektorene som kolonnevektorer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hvis $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, er dermed

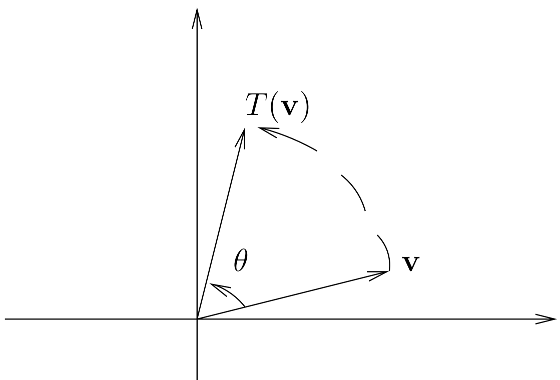
$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Bilde av enhetskvadratet:




■

**Eksempel 1.60** (Rotasjon) Avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterer enhver vektor $\mathbf{v}$ en vinkel $\theta$ i positiv omløpsretning er lineær (overbevis deg selv om det!).




For å finne standardmatrisen til $T$ må vi beregne $T(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2)$. Hvis vi roterer $\mathbf{e}_1$ en vinkel $\theta$, ender den i vektoren $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ (vi bruker definisjonen av cosinus og sinus til generelle vinkler -sjekk ved tegning!).

Dette betyr altså at

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}.$$

Siden $\mathbf{e}_2$ ligger en vinkel $\pi/2$ foran $\mathbf{e}_1$ når vi roterer i positiv retning, får vi (sjekk ved tegning!)

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

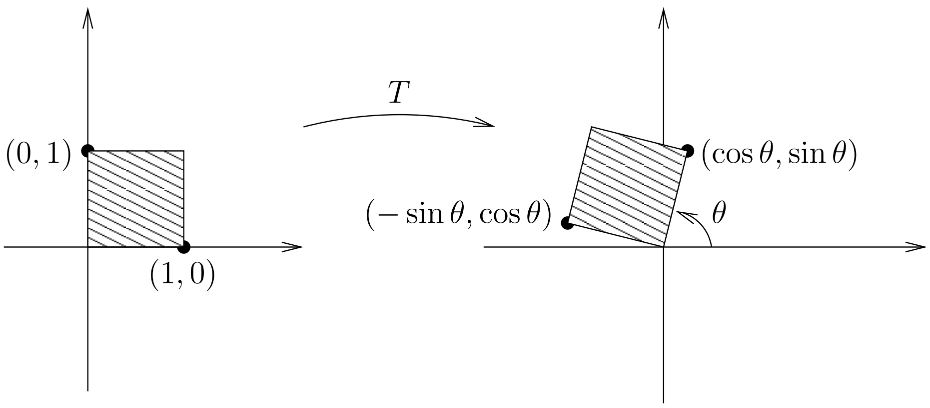
Vi får dermed

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Dersom vi roterer en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en vinkel $\theta$ i positiv retning, får vi dermed en ny vektor

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Bilde av enhetskvadratet:




■

Du vil få utforske flere eksempler i oppgavene.

## 1.10 Nå skal du kunne

- mer om lineære likningssystemer, vektorer og matriser, herunder bruke vektorformen til et lineært likningssystem, for eksempel til å balansere en kjemisk likning

- definisjonene av lineær avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$, lineær kombinasjon, Span av en mengde vektorer, lineær avhengighet og uavhengighet, underrom av $\mathbb{R}^n$, nullrom til en matrise, basis til et underrom, standardbasis, dimensjon til et underrom

- regne med begrepene i forrige punkt, for eksempel sjekke om en gitt mengde vektorer er lineært uavhengige, og om en gitt vektor er utspent av en gitt mengde vektorer

- visualisere de ulike begrepene vi har definert - i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$

- ha et godt forhold til de ekstra viktige utsagnene (1.9), (1.14) og teorem 1.56

## 1.11 Oppgaver, kapittel 1

**Oppgave 1** Skriv likningssystemet på vektorform.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x - 8y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z + w = 15 \\ x - 2y + 4z - w = 12 \end{cases}$

**Oppgave 2** Balanser den kjemiske likningen ved å bruke metoden i Seksjon 1.3 (Et par av likningene er ekstra enkle å gjøre i hodet, men bruk metoden for treningens skyld. I d) og e) er det lov å bruke f.eks. kalkulator til å redusere matrisen; kommandoen «rred» i et «matrix»-program står for «row reduced».)

a) $NH_3 \to N_2 + H_2$
(N=nitrogen, H=hydrogen)

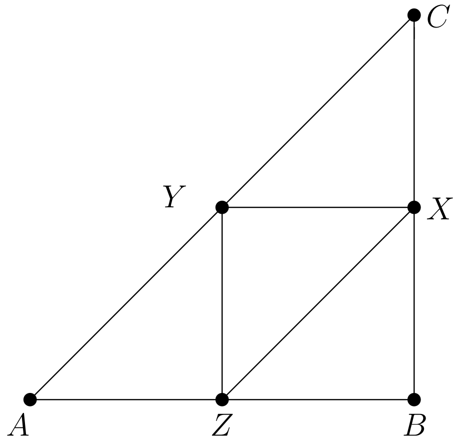
b) $B_2H_6 + O_2 \to B(OH)_3$
(B=bor, H=hydrogen, O=oksygen)

c) $MnO_3 + Al \to Mn + Al_2O_3$
(Mn=mangan,O=oksygen, Al=aluminium)

d) $Cu + H_2O + SO_2 + O_2 \to Cu_3(OH)_4SO_4$
(Cu=kobber, H=hydrogen, O=oksygen, S=svovel)

e) Likning (1.8): $PbN_6 + CrMn_2O_8 \to Pb_3O_4 + Cr_20_3 + MnO_2 + NO$
(Pb=bly, N=nitrogen, Cr=krom, Mn=mangan, O=oksygen)

**Oppgave 3** Figuren på neste side viser et nettverk av ledninger. Temperaturen i hvert av punktene $X$, $Y$ og $Z$ er lik gjennomsnittet av temperaturen i nabopunktene (dvs. punktene som de er forbundet til ved hjelp av en ledning). Anta at temperaturen i hjørnepunktene $A$, $B$ og $C$ er henholdsvis $a$, $b$ og $c$. Finn temperaturene $x$, $y$ og $z$ i punktene $X$, $Y$ og $Z$.




**Oppgave 4** I et game i tennis må du vinne med minst to poeng. Når man kommer til stillingen 40-40, vil spilleren som vinner den neste ballvekslingen få «fordel». Vinner hun også den neste ballvekslingen, vinner hun gamet, hvis ikke går stillingen tilbake til «like». Spilleren som vinner den neste ballvekslingen vil så få fordel, osv. I denne delen av spillet er det altså tre mulige stillinger: «like», «fordel spiller $A$» og «fordel spiller $B$». I tennis lønner det seg å serve, og vi antar at i det gamet vi ser på, er det spiller $A$ som har serven og dermed har 60 % sjanse for å vinne en ballveksling.

Vi lar $x$ være spiller $A$s sannsynlighet for å vinne gamet dersom stillingen er like, $y$ hennes sannsynlighet for å vinne gamet dersom hun har fordel og $z$ hennes sannsynlighet for å vinne gamet dersom motstanderen har fordel.

a) Forklar at

$$\begin{aligned} x &= 0.6y + 0.4z \\ y &= 0.4x + 0.6 \\ z &= 0.6x \end{aligned}$$

b) Finn $x$, $y$ og $z$.

**Oppgave 5** Avgjør om følgende avbildninger er lineære. Begrunn.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $T((x, y)) = (x, 3y, x + y)$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $T((x, y)) = (x - 3y, x + 4, y)$.

**Oppgave 6** a) La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ og definer $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Finn $T(\mathbf{u})$ og $T(\mathbf{v})$ når $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) La $A$ være en $4 \times 3$-matrise. Hva må $s$ og $t$ være for å kunne definere $T\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$ ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$?

**Oppgave 7** Skriv $\mathbf{b}$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ når $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

**Oppgave 8** Skriv $\mathbf{b}$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ når $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

**Oppgave 9** Avgjør om alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ (for relevant $n$) kan skrives som en lineær kombinasjon av vektorene:

a) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$.

**Oppgave 10** Avgjør om vektorene er lineært uavhengige:

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

**Oppgave 11** Finn en lineært uavhengig delmengde blant de oppgitte vektorene:

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

**Oppgave 12** Avgjør om mengden er en basis for det relevante rommet $\mathbb{R}^n$ (i noen av tilfellene lønner det seg å tenke før man regner!)

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

**Oppgave 13** Utvid mengden av vektorer til en basis for det relevante rommet $\mathbb{R}^n$:

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

**Oppgave 14** Finn en basis for underrommet $H$ når

a) $H = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ der $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -1, -2)$.

b) $H$ er rommet som består av kolonnene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

c) $H$ er rommet som består av radene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

**Oppgave 15** Vis at $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ er en basis for $\mathbb{R}^2$. Skriv $\mathbf{v} = (3, -1)$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

**Oppgave 16** I denne oppgaven er vi i $\mathbb{R}^3$.

a) Anta at $H$ er en rett linje gjennom origo. Forklar at $H$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$. Hva er dimensjonen til $H$?

b) Anta at $H$ er et plan gjennom origo. Forklar at $H$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$. Hva er dimensjonen til $H$?

**Oppgave 17** Finn $\text{Nul}\, A$ og $\dim(\text{Nul}\, A)$.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

**Oppgave 18** Finn matrisen til den lineære avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$T((x,y,z)) = \begin{bmatrix} 2x - y + z \\ -x + y - 3z \end{bmatrix}$$

**Oppgave 19** En lineær avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tilfredsstiller

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Finn standardmatrisen til $T$.

**Oppgave 20** La $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Den lineære avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tilfredsstiller $T(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Finn $T(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$.

**Oppgave 21** Den lineære avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder ethvert punkt på sitt speilbilde om $y$-aksen. Finn standardmatrisen til $T$.

**Oppgave 22** Den lineære avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fordobler alle annenkomponenter, men endrer ikke førstekomponenter. Finn standardmatrisen til $T$.

**Oppgave 23** Den lineære avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gjør alle vektorer dobbelt så lange og dreier dem en vinkel $\theta$ i positiv retning. Finn standardmatrisen til $T$.

**Oppgave 24** Den lineære avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avbilder alle vektorer på sin projeksjon ned i $xy$-planet, dvs. $(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$. Finn standardmatrisen til $T$.

**Oppgave 25** (vanskelig) Den lineære avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ speiler alle vektorer om $x$-aksen og dreier dem deretter en vinkel $\theta$ i positiv retning. Finn matrisen til $T$ (det kan være lurt å tenke på $T$ som sammensetningen av to enklere avbildninger, og dermed multiplisere to standardmatriser).

**Oppgave 26** (vanskelig) $\mathcal{L}$ er linjen gjennom origo som fremkommer når vi roterer $x$-aksen en vinkel $\phi$ i positiv retning. Den lineære avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ speiler alle punkter om linjen $\mathcal{L}$. La $A_\phi$ være matrisen til avbildningen som roterer alle vektorer en vinkel $\phi$ i positiv retning, og la $B$ være matrisen til avbildningen som speiler alle punkter om $x$-aksen. Forklar at matrisen $C$ til $T$ er gitt ved

$$C = A_\phi B A_{-\phi}$$

og bruk denne formelen til å finne $C$.

**Oppgave 27** La $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Finn tall $x, y, z, u$ slik at $\mathbf{e}_1 = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ og $\mathbf{e}_2 = z\mathbf{a} + u\mathbf{b}$.

b) Den lineære avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tilfredsstiller $T(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Finn $T(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2)$.

c) Finn standardmatrisen til $T$.

**Oppgave 28** (vanskelig, ikke fasit) Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0})$ ikke er parallelle, og la $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$. Vis at de finnes nøyaktig én lineær avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at $T(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1$ og $T(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_2$.

**Oppgavene 29-32 er teoretiske. Det er ikke gitt fasit på disse oppgavene, så spør foreleser/plenumsregner. Prøv spesielt på Oppgave 32.**

**Oppgave 29** Anta at $H_1$ og $H_2$ er underrom av $\mathbb{R}^n$.

a) Vis at $H = H_1 \cap H_2$ også er et underrom av $\mathbb{R}^n$. (*Snittet* $H_1 \cap H_2$ består av de vektorene som er med i *både* $H_1$ og $H_2$.)

b) Vis ved et eksempel at $H = H_1 \cup H_2$ ikke alltid er et underrom av $\mathbb{R}^n$. (*Unionen* $H_1 \cup H_2$ består av de vektorene som er med i minst én av mengdene $H_1$ og $H_2$.)

**Oppgave 30** Anta at $H_1$ og $H_2$ er underrom av $\mathbb{R}^n$. Vi lar

$$H_1 + H_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 : \ \mathbf{u}_1 \in H_1, \mathbf{u}_2 \in H_2\}$$

dvs. at $H_1 + H_2$ består av alle elementene i $\mathbb{R}^n$ som kan skrives som en sum av et element i $H_1$ og et element i $H_2$.

a) Vis at $H_1 + H_2$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$

b) Vis at $\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$

**Oppgave 31** Anta at $H$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

a) Vis at dersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært uavhengige vektorer i $H$, så kan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ utvides til en basis for $H$ (det kan tenkes at denne utvidelsen er lik $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$).

b) Anta at $K$ er et *annet* underrom av $\mathbb{R}^m$ slik at $K \subset H$, dvs. $K$ ligger inne i $H$. Vis at $\dim(K) < \dim(H)$.

**Oppgave 32** I denne oppgaven er $A$ en $m \times n$-matrise.

a) Vis at dimensjonen til nullrommet Nul $A$ er $n-k$ der $k$ er antall ledende 1-ere i den reduserte trappeformen til $A$. (*Hint:* Tenk på hva som skjer når du løser likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ved radredusering. Du får også behov for å vise at noen vektorer er lineært uavhengige).

La $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$. *Kolonnerommet* til matrisen $A$, $\operatorname{Col} A$, er mengden av alle lineære kombinasjoner til kolonnene til $A$, dvs.

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}.$$

b) Vis at $\operatorname{Col} A$ er et underrom av $\mathbb{R}^m$.

c) Vis at dimensjonen til $\operatorname{Col} A$ er $k$, der $k$ er antall ledende 1-ere i den reduserte trappeformen til $A$.

c) Bevis *dimensjonsteoremet* som sier at i en $m \times n$-matrise er summen av dimensjonen til kolonnerommet og dimensjonen til nullrommet alltid lik $n$.

## 1.12 Fasit, kapittel 1

### Oppgave 1

a) $x\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$

b) $x_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\\3\end{bmatrix}$

c) $x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\12\end{bmatrix}$

### Oppgave 2

a) $2\mathrm{NH_3}+\rightarrow \mathrm{N_2}+3\mathrm{H_2}$

b) $\mathrm{B_2H_6}+3\mathrm{O_2}\rightarrow 2\mathrm{B(OH)_3}$

c) $\mathrm{MnO_3}+2\mathrm{Al}\rightarrow \mathrm{Mn}+\mathrm{Al_2O_3}$

d) $3\mathrm{Cu}+2\mathrm{H_2O}+\mathrm{SO_2}+2\mathrm{O_2}\rightarrow \mathrm{Cu_3(OH)_4SO_4}$

e) $15\mathrm{PbN_6}+44\mathrm{CrMn_2O_8}\rightarrow 5\mathrm{Pb_3O_4}+22\mathrm{Cr_20_3}+88\mathrm{MnO_2}+90\mathrm{NO}$

**Oppgave 3** $x=\frac{1}{5}(a+2b+2c)$, $y=\frac{1}{5}(2a+b+2c)$, $z=\frac{1}{5}(2a+2b+c)$

**Oppgave 4** $x=\frac{9}{13}$, $y=\frac{57}{65}$, $z=\frac{27}{65}$

### Oppgave 5

a) Ja. Ved å sette opp likningen

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\3y\\x+y\end{bmatrix}$$

ser vi at $T$ er gitt ved å multiplisere med matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, og dermed en lineær avbildning. Alternativt sjekk punktene i definisjon 1.7.

b) Nei. La $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ og $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$. Vi har

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T((x_1+x_2, y_1+y_2)) = ((x_1+x_2)-3(y_1+y_2), (x_1+x_2)+4, (y_1+y_2)),$$

mens

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) &= (x_1 - 3y_1, x_1 + 4, y_1) + (x_2 - 3y_2, x_2 + 4, y_2) \\ &= ((x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) + 8, (y_1 + y_2)). \end{aligned}$$

Vi ser at pga. «+4»-leddet vil vi ikke ha oppfylt punkt $i$) i definisjon 1.7, så $T$ er ikke lineær.

**Oppgave 6**

a) $T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}$ og $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

b) $s = 3, t = 4$

**Oppgave 7** $\mathbf{b} = -\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2$

**Oppgave 8** $\mathbf{b} = (-1)\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + (-1)\mathbf{a}_3$

**Oppgave 9** a) Ja b) Nei c) Ja

**Oppgave 10** a) Ja b) Nei c) Nei d) Ja e) Ja

**Oppgave 11**

a) F.eks. vektor 1 og 3,

b) F.eks. de tre første,

c) F.eks. vektor 1, 2 og 4

**Oppgave 12**

a) Nei (for mange elementer)

b) Nei (for få elementer)

c) Ja

d) Ja

**Oppgave 13**

a) Legg f.eks. til $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) Legg f.eks. til $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

**Oppgave 14** Det er mange riktige svar på disse oppgavene.

a) For eksempel $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$.

b) For eksempel $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

c) For eksempel $(3, -1), (2, 0)$.

**Oppgave 15** $\mathbf{v} = \sqrt{2}\mathbf{v}_1 + 2\sqrt{2}\mathbf{v}_2$

**Oppgave 16** Bruk definisjon 1.31. a) 1 b) 2

**Oppgave 17**

a) $\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\}$, dimensjon 0.

b) $\operatorname{Nul} A = \{s \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \ : \ s \in \mathbb{R}\}$, dimensjon 1.

c) $\operatorname{Nul} A = \left\{ s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ : \ s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$,
dimensjon 3.

**Oppgave 18** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

**Oppgave 19** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

**Oppgave 20** $-\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

**Oppgave 21** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Oppgave 22** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

**Oppgave 23** $\begin{bmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\cos\theta \end{bmatrix}$

**Oppgave 24** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Oppgave 25** $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

**Oppgave 26** $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

**Oppgave 27**

a) $x = -\frac{3}{7}$, $y = \frac{1}{7}$, $z = \frac{1}{7}$, $u = \frac{2}{7}$

b) $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

**Oppgave 28** ikke fasit

**Oppgave 29, 30, 31 og 32** ikke fasit

# Kapittel 2

# Mer om kvadratiske matriser

Vi lader opp til anvendelser, og skal bli enda bedre kjent med matriser. I mange anvendelser er det ofte de kvadratiske matrisene som dukker opp, så fra nå skal vi jobbe med dem, dvs. matriser som har like mange rader som kolonner.

Mengden av alle $n \times n$-matriser der komponentene er reelle tall kalles $M_n(\mathbb{R})$, dvs.

$$M_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ for } i, j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Siden vi kan tenke på et tall $a$ som $1 \times 1$-matrisen $[a]$, kan vi i denne sammenhengen tenke på mengden $\mathbb{R}$ som mengden av $1 \times 1$-matriser, $M_1(\mathbb{R})$.

For kvadratiske matriser gir det mening å snakke om *diagonalen* til matrisen.

**Definisjon 2.1** *Hoveddiagonalen til en $n \times n$-matrise $[a_{ij}]$ består av komponentene $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, dvs. de komponentene som ligger på diagonalen som starter øverst i venstre hjørne.*

**Bemerkning 2.2** Hoveddiagonalen kalles ofte også bare *diagonalen*, og komponentene refereres til som *diagonalkomponentene* eller *komponentene på* *diagonalen.* ■

**Eksempel 2.3** Matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

er en $3 \times 3$-matrise med komponenter i $\mathbb{R}$, dvs. $M \in M_3(\mathbb{R})$. Diagonalkomponentene er 1, 0 og 12. ■

**Eksempel 2.4** Mengden $M_2(\mathbb{R})$ er mengden av alle $2\times 2$-matriser med komponenter i $\mathbb{R}$, dvs.

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hoveddiagonalen til $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ består av komponentene $a$ og $d$. ■

I dette kapittelet vil «matrise» bety «kvadratisk matrise».

## 2.1 Mer om determinanter

Vi husker fra MAT1001 at determinanten til en matrise er et nyttig tall, som bl.a. kan fortelle oss noe om antall løsninger av lineære likningssystemer. Vi har lært en formel for å regne ut determinanten til en matrise:

$$\boxed{\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \det M_1 - a_{12} \det M_2 + a_{13} \det M_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det M_n \end{aligned}} \quad (2.1)$$

der $M_i$ er den $(n-1) \times (n-1)$-matrisen som fremkommer når vi stryker rad 1 og kolonne $i$.

Formel (2.1) sier oss kanskje ikke så mye om hvorfor determinanter er nyttige, men vi skal nå gi en annen metode for å regne ut determinanter. Dette vil hjelpe oss å forstå determinanter og deres tilknytning til løsning av lineære likningssystemer litt bedre.

Husk at en *diagonal matrise* er en kvadratisk matrise der alle komponentene utenfor hoveddiagonalen er 0. Vi vil få bruk for følgende resultat:

**Teorem 2.5** *Determinanten til en diagonal matrise $A$ er produktet av komponentene på hoveddiagonalen til $A$.*

Bruk formel (2.1) til å overbevise deg selv om at dette resultatet stemmer!

**Eksempel 2.6**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) \cdot (-\tfrac{1}{2}) \cdot 3 = \tfrac{15}{2}$$

■

Når vi løser et lineært likningssystem, radreduserer vi den utvidede matrisen til systemet ved hjelp av følgende tre radoperasjoner:

1) Multiplisere en rad med en konstant forskjellig fra 0.

2) Bytte om to rader.

3) Legge til et multiplum av en rad til en annen rad.

La oss se hva som skjer med determinanten til en matrise når vi utfører disse operasjonene på matrisen. Vi ser på $2 \times 2$-matriser først. La $A$ være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

som har determinant $\det(A) = ad - bc$.

1) Vi multipliserer en rad i $A$ med en konstant $r$ og regner ut determinanten, for eksempel:

$$\begin{vmatrix} ra & rb \\ c & d \end{vmatrix} = rad - rbc = r(ad - bc) = r \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Vi ser at determinanten endres med en faktor $r$ (uavhengig av hvilken rad vi multipliserer med $r$).

2) Vi bytter om de to radene i $A$ og regner ut determinanten:

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Vi ser at determinanten skifter fortegn.

3) Vi legger til et multiplum av en rad til en annen rad og regner ut determinanten, for eksempel:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c + ra & d + rb \end{vmatrix} = a(d + rb) - b(c + ra) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Determinanten forandres ikke! (Sjekk at det også gjelder hvis vi legger til et multiplum av rad 2 til rad 1.)

I neste avsnitt skal vi utforske litt nærmere hva som skjer geometrisk i hvert av tilfellene.

Ved hjelp av en god porsjon tålmodighet kan man vise at det vi har observert for $2\times2$-matriser, også holder for $n\times n$-matriser, dvs. vi har følgende resultat:

**Teorem 2.7** *La $A$ være i $M_n(\mathbb{R})$.*

*1) Hvis vi multipliserer en rad i $A$ med en konstant $r$ vil matrisen vi da får ha determinant lik $r\det(A)$.*

*2) Hvis vi bytter om to rader i $A$, vil matrisen vi da får ha determinant lik $-\det(A)$.*

*3) Hvis vi legger til et multiplum av en rad i $A$ til en annen rad i $A$, vil matrisen vi da får ha determinant lik $\det(A)$.*

Vi viser ikke dette resultatet i detalj her (vi har vist det algebraisk for $n = 2$, og vil også gi et geometrisk bevis i dette tilfellet i neste seksjon), men ta gjerne en titt i f.eks. heftet som brukes i MAT1110 hvis du vil se detaljene. Vi skal imidlertid bruke dette resultatet til å effektivisere utregningen av determinanter.

På veien dit minner vi om at en *øvre triangulær matrise* er en kvadratisk matrise der alle komponentene under diagonalen er null. Ved å kombinere teorem 2.5 og teorem 2.7 får vi følgende resultat:

**Teorem 2.8** *La $A$ være en øvre triangulær matrise. Determinanten til $A$ er produktet av komponentene på diagonalen til $A$.*

*Bevis:* I tilfellet der $a_{ii} \neq 0$ for alle $i \geq 2$, dvs. at alle diagonalkomponentene er forskjellig fra 0, bortsett fra den øverste i venstre hjørne som eventuelt kan være 0:

Vi vil bruke teorem 2.5, som sier at determinanten til en *diagonal* matrise er lik produktet av komponentene på diagonalen. Dessuten trenger vi teorem 2.7.

For å gjøre en øvre triangulær matrise av den typen vi her betrakter om til en diagonal matrise, legger vi til et passende multiplum av hver rad til radene over denne, for å skaffe 0-ere over komponentene på diagonalen.

Dette er radoperasjoner av typen 3), som ved teorem 2.7 ikke forandrer determinanten. Dette betyr at determinanten til en øvre triangulær matrise er lik determinanten til en diagonal matrise med de samme komponentene på diagonalen. Resultatet følger nå fra teorem 2.5.

I resten av tilfellene, dvs. $a_{ii} = 0$ for minst en $i \geq 2$:

Hvis matrisen $A$ har en eller flere 0-ere på diagonalen, vil determinanten til $A$ være 0. Vi gir ikke et fullstendig bevis for det her, men forsøk å overbevise deg selv om det (husk at vi har formel (2.1)). $\square$

**Eksempel 2.9**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{15}{2}$$

$\blacksquare$

I jakten på en effektiv måte å regne ut determinanter på har vi nå tatt skrittet fra diagonal matrise til øvre triangulær matrise. For å regne ut determinanter av en hvilken som helst kvadratisk matrise, trenger vi *trappeformen* til en matrise. Vi har følgende definisjon (vi definerte trappeform for en *utvidet* matrise i MAT1001):

**Definisjon 2.10** *En matrise er på trappeform hvis i) – iii) nedenfor er oppfylt:*

*i) Hvis det fins rader som bare består av 0-ere, så er de samlet i bunnen av matrisen.*

*ii) Hvis en rad ikke bare består av 0-ere, så er første tallet i raden som er forskjellig fra 0, lik 1. Denne 1-eren kalles en ledende 1-er.*

*iii) For hvert par av rader som ligger under hverandre og som ikke bare består av 0-ere, skal den ledende 1-eren i den nederste av de to radene være lengre til høyre enn den ledende 1-eren i raden over.*

Vi gjør oss følgende viktige observasjoner:

- En kvadratisk matrise på trappeform er en øvre triangulær matrise.
- En matrise på trappeform har bare 1-ere og 0-ere på diagonalen.

Videre observerer vi følgende: For en *kvadratisk* matrise på trappeform kan en av to ting skje:

**Bare 1-ere på diagonalen:** I dette tilfellet gir teorem 2.8 at determinanten til matrisen på trappeform er lik 1.

**Minst en 0-er på diagonalen:** Teorem 2.8 gir at determinanten er lik 0.

Så fort det dukker opp en 0 på diagonalen i radreduseringen, vil vi altså automatisk vite at determinanten til matrisen vi startet med er lik 0.

Dersom det ikke dukker opp noen 0-ere på diagonalen under radreduseringen vil determinanten til matrisen vi startet med måtte være forskjellig fra 0. La oss se hvordan vi kan beregne determinanten ved å benytte resultatene ovenfor:

**Eksempel 2.11** Vi vil finne determinanten til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Vi radreduserer som vanlig, og holder styr på radoperasjonene (ved å notere over tegnet $\sim$, som leses «radekvivalent med»). For å få til en bedre forklaring har vi også gitt navn til matrisene vi får underveis (noe som kan være en hjelp. Navngivning kan også droppes, men da må vi være ekstra konsentrert i determinant-overgangene):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \overset{\substack{-2\cdot R_1 \mathrm{til} R_2 \\ -3\cdot R_1 \mathrm{til} R_3}}{\sim} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2}\cdot R_2}{\sim} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} \overset{-3\cdot R_2 \mathrm{til} R_3}{\sim} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\overset{-2\cdot R_3}{\sim} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har altså utført overgangene $A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim B$. Vi sier at disse matrisene er *radekvivalente* med hverandre. Vi ser nå på hva som har skjedd med determinanten for hver overgang (vi setter «den nye» matrisen først siden det er dennes determinant som forandres i forhold til «den gamle»):

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= \det(A) && \text{ved teorem 2.7 punkt 3)} \\ \det(A_2) &= \tfrac{1}{2}\det(A_1) && \text{ved teorem 2.7 punkt 1)} \\ \det(A_3) &= \det(A_2) && \text{ved teorem 2.7 punkt 3)} \\ \det(B) &= -2\det(A_3) && \text{ved teorem 2.7 punkt 1)} \end{aligned}$$

Dette gir til sammen likningen (sjekk!)

$$\det(B) = (-2)\tfrac{1}{2}\det(A) = -\det(A).$$

Ved teorem 2.8 er $\det(B) = 1$. Så $\det(A) = -\det(B) = -1$. ■

Vi oppsummerer metoden for **å regne ut determinanten til en (stor)**

**matrise A**:

> - Bruk Gauss-eliminasjon for å redusere $A$ til en matrise $B$ på trappeform, dvs. $A \sim B$, og hold styr på / noter ned radoperasjonene som utføres underveis.
> - Regn ut $\det(B)$ ved å bruke teorem 2.8 (siden trappeformen er øvre triangulær). Hvis $\det(B) = 0$, er $\det(A) = 0$. Hvis $\det(B) \neq 0$, gå til neste punkt i metoden.
> - Bruk teorem 2.7 for å finne ut hvordan $\det(A)$ har forandret seg under de ulike radoperasjonene du har utført, og regn deg tilbake fra $\det(B)$ til $\det(A)$.

Jo større $n$ er, jo mer effektiv vil denne metoden være i forhold til formel (2.1).

Pass litt ekstra på når overgangen er en radoperasjon av type 1), slik at faktoren multipliseres med riktig determinant. Det kan være lurt å holde seg til oppskriften med å sette navn på matrisene, slik at det ikke blir slurvefeil i overgangene. Vi tar et eksempel til:

**Eksempel 2.12** Vi vil finne determinanten til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi radreduserer som vanlig, og holder styr på radoperasjonene:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{(-3)\cdot R_1 \text{til} R_2 \\ (-2)\cdot R_1 \text{til} R_3}}{\sim} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}\cdot R_2}{\sim} M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-2\cdot R_2 \text{til} R_3}{\sim} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Vi har altså utført $M \sim M_1 \sim M_2 \sim M_3 \sim B$. Legg merke til at vi kunne ha skaffet en ledende 1-er i rad 3 ved å utføre radoperasjonen '$\frac{3}{8} \cdot R_3$', men det er også helt i orden å stoppe i $B$ uten å skaffe en ledende 1-er i rad 3: Faktoren $\frac{8}{3}$ mistes ikke, siden vi nå får $\det(B) = \frac{8}{3}$, og ikke 1.

Overgangene gir:

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= -\det(M) && \text{ved teorem 2.7 punkt 2)} \\ \det(M_2) &= \det(M_1) && \text{ved teorem 2.7 punkt 3)} \\ \det(M_3) &= \tfrac{1}{3}\det(M_2) && \text{ved teorem 2.7 punkt 1)} \\ \det(B) &= \det(M_3) && \text{ved teorem 2.7 punkt 3)} \end{aligned}$$

Det gir likningen (sjekk!)

$$\det(B) = -\tfrac{1}{3}\det(M).$$

Ved teorem 2.8 er $\det(B) = \frac{8}{3}$, så $\det(M) = -3\det(B) = -3 \cdot \frac{8}{3} = -8$. ■

La oss koble determinanten opp mot løsning av lineære likningssystemer: Vi kan tenke på den kvadratiske matrisen som *koeffisientmatrisen* til et lineært likningssystem med like mange likninger som variabler.

For en *kvadratisk* matrise på trappeform har vi sett at en av to ting skjer:

**Bare 1-ere på diagonalen:** Hvis vi tenker på matrisen som en koeffisientmatrise til et likningssystem, vil systemet ha én løsning. I dette tilfellet er determinanten til matrisen på trappeform er lik 1, og determinanten til matrisen er forskjellig fra 0.

**Minst en 0-er på diagonalen:** Matrisen har minst en rad med bare 0-ere (overbevis deg selv!). Hvis vi igjen tenker på matrisen som en koeffisientmatrise, vil vi ha enten ingen eller uendelig mange løsninger, alt avhengig av hva vektoren $\mathbf{b}$ er i systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: Hvis komponenten til $\mathbf{b}$ er forskjellig fra 0 i en av radene med bare 0-ere, har vi ingen løsning. Ellers vil kolonnene med 0-ere på diagonalen tilsvare frie variabler, og vi har uendelig mange løsninger. I dette tilfellet er determinanten til matrisen på trappeform lik 0, og dermed er også determinanten til matrisen lik 0.

**Eksempel 2.13** Determinanten til matrisen (som er på trappeform)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

er $1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$. Hvis vi tenker oss at denne matrisen er koeffisientmatrisen til et system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

vil vi ha uendelig mange løsninger hvis $b_3 = 0$ og ingen løsninger hvis $b_3 \neq 0$.

Hvis systemet er homogent, dvs. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, har vi uendelig mange løsninger.

■

**Bemerkning 2.14** Vi har nå sett en litt nærmere forklaring på følgende nyttige resultat fra MAT1001 (teorem 3.12 i *Matematisk verktøykasse*):

**Teorem 2.15** *Anta at vi har et lineært likningssystem med $n$ likninger og $n$ variabler, og la $A$ være koeffisientmatrisen til systemet.*

**Hvis** $\det(A) \neq 0$ *har likningssystemet nøyaktig én løsning.*

**Hvis** $\det(A) = 0$ *har likningssystemet enten ingen eller uendelig mange løsninger.*

■

## 2.2 Visualisering av $2 \times 2$-determinanter

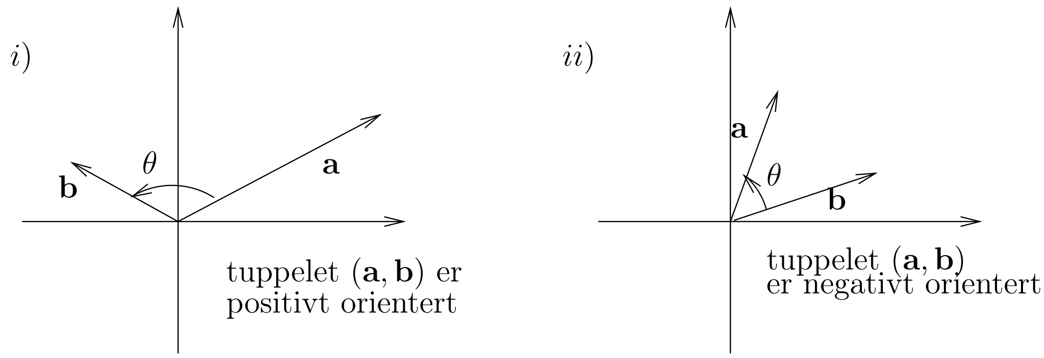
For å forstå den geometriske tolkningen av $2 \times 2$-determinanter, er det nyttig å vite litt om *orientering* av et 2-tuppel av vektorer, dvs. et *ordnet* par av vektorer. Vi kan definere orientering av to vektorer i planet ved hjelp av vinkler.

To vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^2$ der $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ bestemmer en vinkel $\theta$ mellom $0°$ og $180°$. Denne vinkelen kalles *vinkelen mellom* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$.

I tilfellet der den ene vektoren er et positivt multiplum av den andre er vinkelen mellom vektorene $0°$. I tilfellet der den ene vektoren er et negativt multiplum av den andre er vinkelen mellom vektorene $180°$. I disse tilfellene er vektorene parallelle.

Legg merke til at dersom vi beveger oss i positiv omløpsretning, vil vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ noen ganger starte i $\mathbf{a}$ og ende i $\mathbf{b}$ (se illustrasjon *i*) nedenfor) og andre ganger starte i $\mathbf{b}$ og ende i $\mathbf{a}$ (illustrasjon *ii*)).

**Definisjon 2.16** *I det første tilfellet sier vi at 2-tuppelet* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *er* positivt orientert*, i det andre tilfellet at det er* negativt orientert*.*




Ordningen på vektorene er altså viktig: Bytter vi om rekkefølgen av vektorene, bytter vi også orientering. Hvis f.eks. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt orientert, så er $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ negativt orientert.

Hvis vi har gitt to vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, kan vi danne $2 \times 2$-determinanten til 2-tuppelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

dvs. vi danner determinanten der vektorene i 2-tuppelet utgjør radene (i samme ordning som i tuppelet). Vi velger altså å legge vektorene inn i determinanten som rader. Dette er fordi vi er interessert i hvordan determinanter påvirkes av *rad*operasjoner.

Determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gir en grei måte for å avgjøre om $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt eller negativt orientert:

> Determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ er positiv dersom tuppelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt orientert, og negativ dersom tuppelet er negativt orientert.

(2.2)

Beviset for denne påstanden vil spesielt interesserte finne helt til slutt i dette avsnittet.

**Eksempel 2.17** La $\mathbf{a} = (3, -4)$ og $\mathbf{b} = (-7, 5)$. Da er

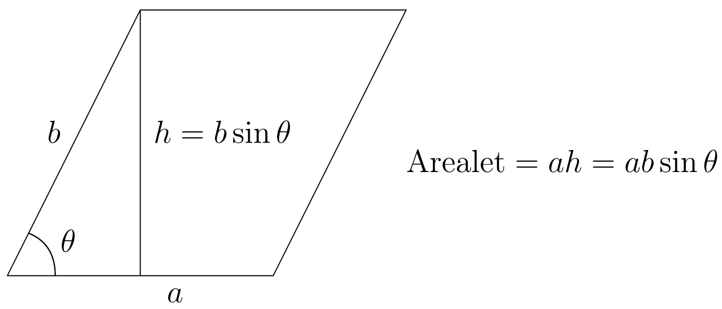
$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-7) \cdot (-4) = 15 - 28 = -13 < 0.$$

Så tuppelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er negativt orientert (tegn!). ■

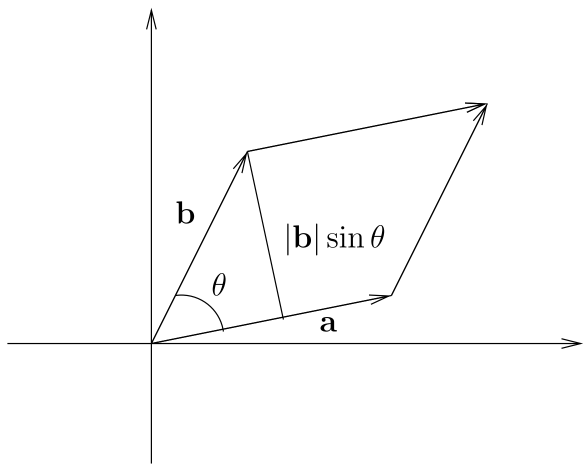
**Bemerkning 2.18** Vi legger merke til at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er 0 dersom $\theta$ er $0°$ eller $180°$, det vil si når $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er parallelle. ■

Fortegnet til determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gjenspeiler altså orienteringen til tuppelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. La oss se om vi kan finne en tolkning av absoluttverdien $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$.

Aller først minner vi om formelen for arealet til et parallellogram. Som det fremgår av tegningen nedenfor, er dette arealet gitt ved $A = ab\sin\theta$, der $a$ og $b$ er lengdene til sidene, og der $\theta$ er vinkelen mellom dem (på figuren er vinkel $\theta$ spiss, men resultatet gjelder også dersom vinkelen er stump).




Vi vet at to vektorer utspenner et parallellogram:



Vi får dermed at arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ er lik $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$, som vi har vist er lik $\pm\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Siden et areal er positivt, betyr det at arealet er lik absoluttverdien til determinanten. Oppsummert, har vi følgende:

**Teorem 2.19** *Determinanten*

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

*er positiv dersom vektorparet* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *er positivt orientert og negativ dersom paret er negativt orientert. Arealet til parallellogrammet utspent av* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er lik* $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$.

**Bemerkning 2.20** Siden

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

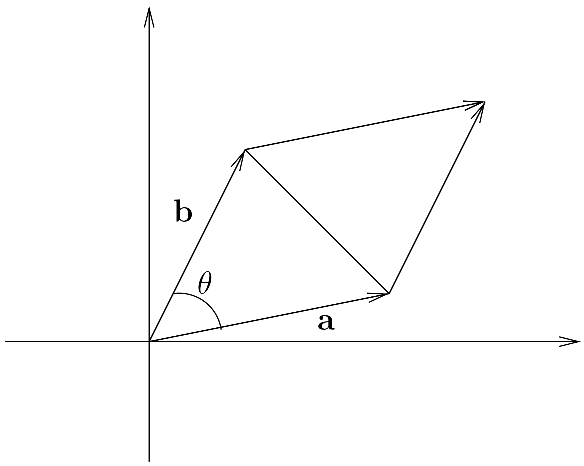
vil teorem 2.19 gjelde uavhengig om vi skriver vektorene i tuppelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ som rader eller kolonner (så lenge vi beholder ordningen). ■

**Eksempel 2.21** Vi vil finne arealet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (3, -7)$ og $\mathbf{b} = (-4, 5)$. Vi har

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-4) \cdot (-7) = 15 - 28 = -13$$

Arealet er dermed $|-13| = 13$. ■

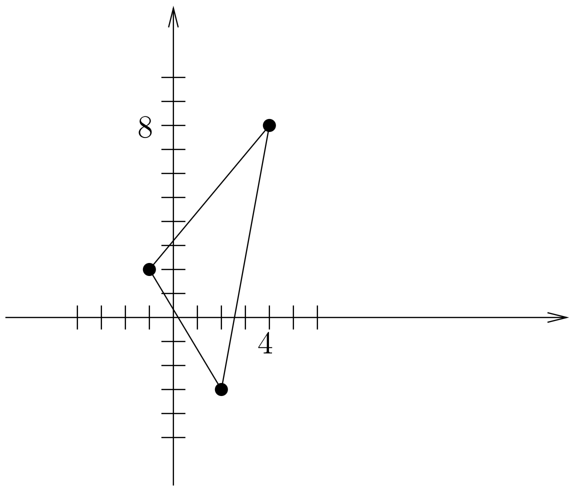
Determinanter kan også brukes til å regne ut arealet til *trekanter*. Arealet til trekanten utspent av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er halvparten av arealet til parallellogrammet utspent av disse vektorene:




Vi har derfor følgende resultat:

**Korollar 2.22** *Arealet til trekanten utspent av* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er* $\frac{1}{2} \cdot |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$.

**Eksempel 2.23** Vi vil finne arealet til trekanten med hjørner i punktene $\mathbf{c} = (-1, 2)$, $\mathbf{d} = (4, 8)$ og $\mathbf{e} = (2, -3)$:




Vi regner ut

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c} = (4, 8) - (-1, 2) = (5, 6)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{e} - \mathbf{c} = (2, -3) - (-1, 2) = (3, -5)$$

Trekanten vi er på jakt etter, har samme areal som trekanten med sider gitt ved vektorene **a** og **b** (hvorfor?). Dermed er

$$\text{Areal} = \tfrac{1}{2} \cdot |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot |-25 - 18| = \tfrac{43}{2}.$$

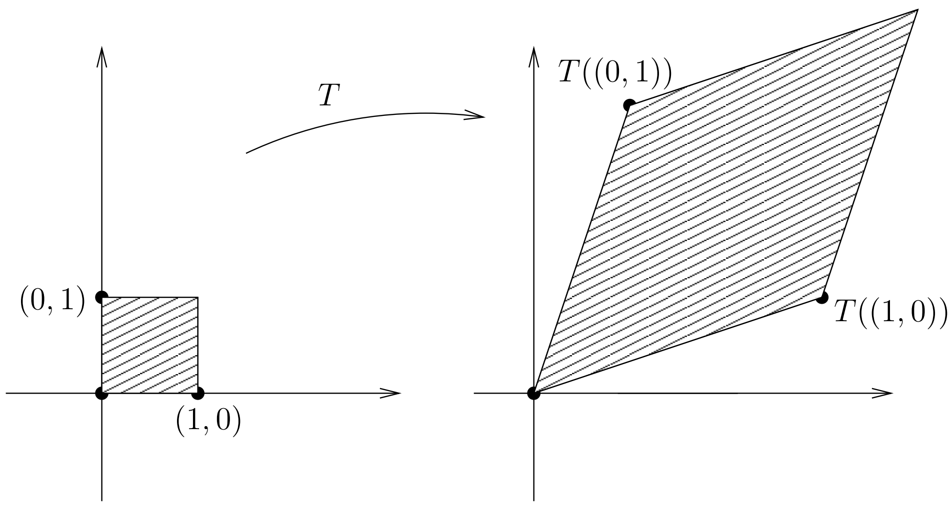
■

Vi tar med en anvendelse av determinanten i forbindelse med lineære avbildninger. Vi innfører først følgende begrep:

**Definisjon 2.24** *Et lineært område i* $\mathbb{R}^2$ *er et område i* $\mathbb{R}^2$ *avgrenset av rette linjestykker.*

Et lineært område i $\mathbb{R}^2$ har altså et areal. Kvadrater og parallellogrammer er eksempler på slike områder. Vi kan bruke determinanten til å si noe om hvordan arealet til et lineært område forandrer seg under en lineær avbildning.

En lineær avbildning sender en rett linje på en rett linje. Den vil også sende parallelle linjer på parallelle linjer (tenk over dette!). Figuren nedenfor viser dette for en lineær avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der enhetskvadratet avbildes på et forstørret og rotert parallellogram:



Hvor stort er arealet til parallellogrammet vi ender opp med, sammenlignet med arealet til kvadratet vi startet med?

Siden $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en lineær avbildning, er den på formen

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

der $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ er en $2 \times 2$-matrise.

Vi starter med enhetskvadratet, som er utspent av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og har areal 1. Parallellogrammet vi får ved å bruke en lineær avbildning $T$ på enhetskvadratet er utspent av $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})$ og $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$, dvs. av vektorene $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$. Dermed vil parallellogrammet ha areal gitt ved $|\det(A)|$ (sjekk!).

Dette gir en indikasjon om at følgende gjelder:

**Teorem 2.25** *La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en lineær avbildning med standardmatrise $A$, og la $\mathcal{F}$ være et lineært område i $\mathbb{R}^2$. Da har vi*

$$\text{Areal}(T(\mathcal{F})) = |\det(A)|\,\text{Areal}(\mathcal{F}).$$

**Eksempel 2.26** Hvis $T$ er den lineære avbildningen fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ som er gitt ved å rotere en vektor en vinkel $\theta$ om den positive førsteaksen, er standardmatrisen til $T$ gitt ved (se eksempel 1.60):

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Siden (sjekk!)

$$\det(A) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

vil ikke arealet til et rotert område endres (noe som stemmer med det vi vet). ■

**Bemerkning 2.27** Når matrisen $A$ i teorem 2.25 har determinant lik 0, ser vi at arealet til $T(\mathcal{F})$ er lik 0. Lineære avbildninger der standardmatrisen har determinant lik 0 vil altså gjøre at arealer «kollapser» ved at de avbilder vektorer på parallelle vektorer (sjekk!), som ikke utspenner noe areal. ■

Vi nevner også at det fins et tilsvarende resultat som teorem 2.25 i $\mathbb{R}^3$, for *volum* av lineære *legemer* (et legeme i $\mathbb{R}^3$ avgrenset av rette flatestykker).

## For spesielt interesserte

Som lovet, tar vi med beviset for påstanden (2.2), som også er første del av teorem 2.19, for spesielt interesserte:

For å studere den geometriske tolkningen av determinanten

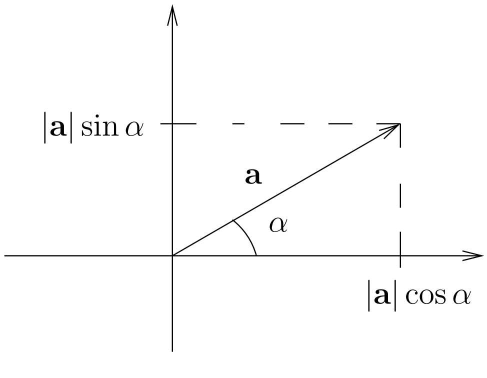
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

lønner det seg å skrive vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ på *polarform* (husk det du lærte om komplekse tall og polarform i MAT1001).

Vi kan skrive vektoren $\mathbf{a}$ på polarform som

$$\mathbf{a} = (|\mathbf{a}| \cos \alpha, |\mathbf{a}| \sin \alpha)$$

der $|\mathbf{a}|$ er lengden til vektoren $\mathbf{a}$, og $\alpha$ er vinkelen mellom vektoren $\mathbf{a}$ og den positive førsteaksen:




Tilsvarende kan vektoren $\mathbf{b}$ skrives på polarform som

$$\mathbf{b} = (|\mathbf{b}| \cos \beta, |\mathbf{b}| \sin \beta)$$

der $|\mathbf{b}|$ er lengden til vektoren $\mathbf{b}$, og $\beta$ er vinkelen mellom vektoren $\mathbf{b}$ og den positive førsteaksen.

La oss nå finne determinanten uttrykt ved $\alpha$ og $\beta$:

$$\det(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |\mathbf{a}|\cos\alpha & |\mathbf{a}|\sin\alpha \\ |\mathbf{b}|\cos\beta & |\mathbf{b}|\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= |\mathbf{a}|\cos\alpha|\mathbf{b}|\sin\beta - |\mathbf{a}|\sin\alpha|\mathbf{b}|\cos\beta$$

$$= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha).$$

Vi bruker nå formelen for sinus til en differanse av to vinkler (se f.eks. Oppgave A.10.11 i *Matematisk verktøykasse*), og får

$$\det(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\beta-\alpha). \tag{2.3}$$

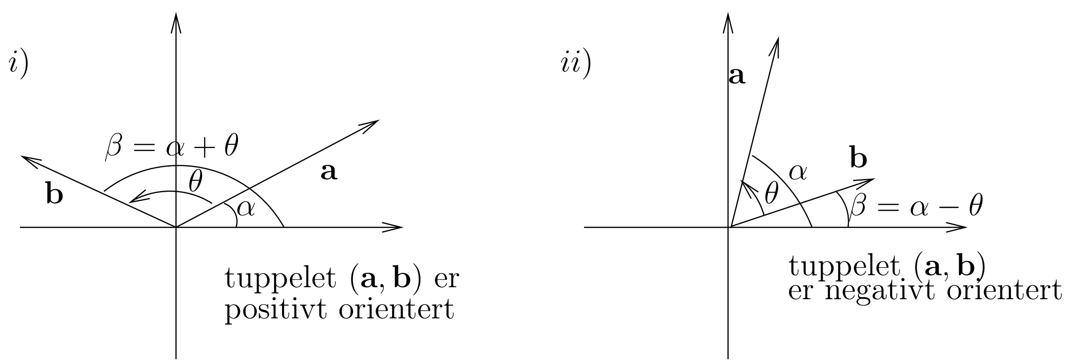
Vi ser altså at determinanten $\det(\mathbf{a},\mathbf{b})$ blant annet avhenger av vinkeldifferansen $\beta-\alpha$. Denne vinkelen vil skifte fortegn alt etter hvilken orientering 2-tuppelet $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ har. La oss se hvorfor:

Vi lar fortsatt $\theta$ være vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Dersom tuppelet $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ er positivt orientert, ser vi fra tegning $i)$ nedenfor at $\beta = \alpha+\theta$, dvs.

$$\beta-\alpha = \theta \quad \text{ved positiv orientering.}$$

Hvis derimot tuppelet $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ er negativt orientert, ser vi fra tegning $ii)$ at $\beta = \alpha-\theta$, dvs.

$$\beta-\alpha = -\theta \quad \text{ved negativ orientering.}$$



Vi har altså

$$\beta - \alpha = \pm\theta$$

der fortegnet er pluss eller minus ettersom tuppelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er henholdsvis positivt eller negativt orientert. Likning (2.3) gir dermed

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\pm\theta),$$

og siden $\sin(\pm\theta) = \pm \sin\theta$, ender vi opp med

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pm|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta.$$

Siden $\sin\theta$ aldri er negativ ($\theta$ ligger per definisjon i intervallet $[0°, 180°]$, der sinus er positiv), vil $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ være positiv dersom tuppelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt orientert, og negativ dersom tuppelet er negativt orientert.

## 2.3 Å invertere en matrise

Vi ble ganske godt kjent med regneregler for matriser i MAT1001, men hvis vi sammenligner dem med regnereglene for reelle tall, er det kanskje noe du savner? Hvis ikke, lar vi det være en påstand: Det er noe vi savner blant disse regnereglene.

La oss se på matrisemultiplikasjon for kvadratiske matriser. Vi lar $A$ og $B$ være i $M_n(\mathbb{R})$, og lar $I_n$ være identitetsmatrisen ($n \times n$-matrisen med 1-ere på diagonalen og 0-ere ellers). Da kan vi sjekke at (sjekk!)

- $AB$ er en $n \times n$-matrise;
- $BA$ er en $n \times n$-matrise;
- $AI_n = A$;
- $I_nA = A$.

Hvis vi sammenligner multiplikasjon for $\mathbb{R}$ med multiplikasjon for $M_n(\mathbb{R})$, ser vi at regneregelen $a1 = 1a = a$ for $\mathbb{R}$ tas vare på i $M_n(\mathbb{R})$, ved at matrisen $I_n$ spiller rollen til tallet 1.

Hva med regneregelen $a\frac{1}{a} = \frac{1}{a}a = 1$, for $a \neq 0$, der tallet 1 også spiller en sentral rolle? Tas denne regelen vare på i $M_n(\mathbb{R})$? Det har vi foreløpig ikke sagt noe om, og det er det vi savner. Det skal vi gjøre noe med nå.

For å se analogien, minner vi om følgende definisjon:

**Definisjon 2.28** *Anta at $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Tallet $\frac{1}{a} = a^{-1}$ kalles det (multiplikativt) inverse tallet til $a$.*

For eksempel er $\frac{1}{2}$ det inverse tallet til 2.

**Bemerkning 2.29** Det *additivt inverse tallet* til $a$ er $-a$ (siden $a + (-a) = (-a) + a = 0$). Det er ofte vanlig å droppe ordene multiplikativt og additivt, og bare snakke om det inverse tallet. Om den underliggende operasjonen er multiplikasjon eller addisjon er da underforstått.

Vi holder oss til skrivemåten $a^{-1}$ (og ikke brøk-skrivemåten) for det inverse tallet til $a$. ■

I matrisespråket har vi for $n = 1$ og $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$:

$$[a][a^{-1}] = [aa^{-1}] = [1] = I_1. \tag{2.4}$$

Vi ønsker å oppfylle en tilsvarende regel for $n > 1$, dvs. vi ønsker å finne en matrise $C$ slik at $AC = I_n$ ($C$ må altså være en $n \times n$-matrise). Igjen vil måten vi multipliserer matriser på gjøre at vi må jobbe litt ekstra:

- For det første, matrisemultiplikasjon er ikke nødvendigvis kommutativ, dvs. vi er ikke garantert at $AC = CA$, så dermed vil vi kreve at denne $C$-en oppfyller $AC = CA = I_n$. Vi innfører følgende definisjon:

  **Definisjon 2.30** *La $A \in M_n(\mathbb{R})$. En $n \times n$-matrise $C$ kalles en invers (matrise) til $A$ hvis*
  $$AC = CA = I_n.$$

- For det andre, vet vi at alle tall unntatt 0 har et inverst tall. For matriser vil det være flere matriser enn nullmatrisen som ikke har en invers:

**Eksempel 2.31** La $A$ være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi vil prøve å finne en $2 \times 2$-matrise $C$ slik at $AC = I_2$. Hvis den fins, kan vi eventuelt sjekke etterpå om $CA$ også er lik $I_2$. Hvis det stemmer, er $C$ en invers til $A$.

Vi kaller komponentene til matrisen $C$ for $a, b, c, d$:

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

og regner ut $AC$:

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 3a & 3b \end{bmatrix}.$$

Hvis $AC$ skal være lik $I_2$, må vi ha oppfylt (sjekk!) $2a = 1$, $2b = 0$, $3a = 0$ og $3b = 1$. Dette er ikke mulig (sjekk!), så en $C$ slik at $AC = I_2$ fins ikke, dvs. vi vil ikke klare å finne en invers til $A$. ■

Spørsmål som trenger seg på: Hvilke matriser har en invers? Og siden matriser oppfører seg litt spesielt, kanskje en matrise kan ha flere inverser?

La oss svare på det siste spørsmålet først: Du kan være trygg på at hvis du finner en invers til en matrise $A$, vil du ikke finne flere. Beviset for at det er sant bruker at matrisemultiplikasjon er assosiativ ($(AB)C = A(BC)$):

**Teorem 2.32** *Hvis vi har oppfylt $AC = CA = I_n$ og $AB = BA = I_n$ for $n \times n$-matriser $A, B$ og $C$, så er $B = C$, dvs. en $n \times n$-matrise $A$ har høyst én invers matrise.*

*Bevis:* Hvis både $B$ og $C$ er inverse matriser til $A$, har vi (sjekk hver likhet!)

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C,$$

dvs. $B$ og $C$ er like. □

**Bemerkning 2.33** Siden en matrise har høyst én invers, gir det mening å snakke om *den* inverse til $A$ (hvis den fins!). ■

Vi kan altså dele de kvadratiske matrisene inn i to mengder: de som har en invers og de som ikke har en invers:

**Definisjon 2.34** *La $A \in M_n(\mathbb{R})$. Hvis $A$ har en invers, kalles $A$ inverterbar (eventuelt invertibel), og den inverse til $A$ betegnes med $A^{-1}$.*
*Hvis $A$ ikke har en invers kalles $A$ en singulær matrise.*

De inverterbare matrisene har for øvrig en egen notasjon: Mengden av de inverterbare $n \times n$-matrisene med komponenter i $\mathbb{R}$ kalles $GL_n(\mathbb{R})$.

**Eksempel 2.35** I eksempel 2.31 så vi en matrise $A$ som ikke har en invers, dermed er den ikke inverterbar, dvs. den er singulær. ■

I jakten på de inverterbare matrisene, kan det hjelpe å se litt på hvordan vi inverterer er matrise, dvs. finner en invers:

**Eksempel 2.36** Vi forandrer en smule på matrisen i eksempel 2.31. La nå $M$ være matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi vil nå prøve å finne en $2 \times 2$-matrise $C$ slik at $MC = I_2$.

Vi kaller igjen komponentene til matrisen $C$ for $a, b, c, d$, dvs.

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

og regner ut $MC$:

$$MC = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - c & 2b - d \\ 3a & 3b \end{bmatrix}$$

Hvis $MC$ skal være lik $I_2$, må vi ha oppfylt likningssystemet (sjekk!)

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2b - d = 0 \\ 3a = 0 \\ 3b = 1. \end{cases}$$

I motsetning til eksempel 2.31 får vi nå et system som har én løsning, nemlig (sjekk!)

$$(a, b, c, d) = (0, \tfrac{1}{3}, -1, \tfrac{2}{3}),$$

dvs. matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

er slik at $MC = I_2$. Du kan også sjekke at $CM = I_2$ (gjør det!), dvs. $M$ er inverterbar, og $C$ er den inverse til $M$. ■

I Eksemplene 2.31 og 2.36 har vi sett at det å finne en eventuell invers til en matrise gir opphav til et lineært likningssystem! I eksempel 2.31 kan vi ikke løse systemet, og matrisen har ingen invers. I eksempel 2.36 har systemet en løsning, og matrisen har en invers.

Det ser altså ut til å være en sammenheng mellom inverse matriser og lineære likningssystemer, og dermed determinanter. Tatt i betraktning det vi nå vet om lineære likningssystemer og determinanter, er ikke denne sammenhengen unaturlig i det hele tatt, og vi skal nå først gi en metode for å finne inverse matriser, og så sette opp sammenhengene.

Fremfor å skrive opp alle detaljene for hvorfor metoden for å finne inverse matriser vi nå skal gi fungerer, velger vi i første omgang å gi en intuitiv forklaring.

Metoden er gitt av følgende resultat:

**Teorem 2.37** *En $n \times n$-matrise $A$ er inverterbar hvis og bare hvis $A$ er radekvivalent med $I_n$, og i dette tilfellet vil radoperasjonene som reduserer $A$ til $I_n$, redusere $I_n$ til $A^{-1}$.*

*Nærmere forklaring:* Det første punktet i teoremet forteller oss nøyaktig hvilke matriser som har en invers: det er altså de som er radekvivalent med $I_n$, dvs. de matrisene $A$ slik at systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har én løsning for alle $\mathbf{b}$. (Vi har sett at når koeffisientmatrisen kan radreduseres til identitetsmatrisen, får vi én løsning på systemet.)

Neste punkt i teoremet forteller oss hvordan vi kan invertere en matrise, dvs. finne den inverse matrisen (når den eksisterer).

Når vi inverterer et tall, tenker vi «hvilket tall må jeg mulitplisere med for å få 1?» Når vi skal invertere en matrise, tenker vi «hvilken matrise må jeg multiplisere med for å få identitetsmatrisen?» Det betyr at vi skal finne en $C$ slik at $AC = I_n$.

La $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ være kolonnene til $C$, og $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ være kolonnene til $I_n$ (standardbasisen til $\mathbb{R}^n$). Nå er $AC = [A\mathbf{c}_1 \; A\mathbf{c}_2 \; \cdots \; A\mathbf{c}_n]$ (husk at når vi multipliserer matriser, bruker vi kolonnene i matrisen som står til høyre) og $I_n = [\mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2 \; \cdots \; \mathbf{e}_n]$. Så vi får å løse $n$ likningssystemer

$$A\mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_1, \; A\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_2, \; \ldots, \; A\mathbf{c}_n = \mathbf{e}_n. \tag{2.5}$$

Siden koeffisientmatrisen er den samme i alle systemene, nemlig lik $A$, kan vi slå sammen alle disse likningssystemene i en «utvidet» utvidet matrise:

$$[A \mid \mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2 \; \cdots \; \mathbf{e}_n]$$

(vi setter ofte en skillestrek etter $A$ for å markere at matrisen er utvidet med flere enn en kolonne). Det betyr at vi skal radredusere

$$[A \mid I_n].$$

Siden vi vet at $A$ er radekvivalent med $I_n$, vil vi få $I_n$ som den reduserte trappeformen på venstre side.

Teoremet sier videre at matrisen som dukker opp på høyre side, etter at vi har radredusert $I_n$ med de samme radoperasjonene, er $A^{-1}$, dvs. vi ender opp med

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}].$$

Analogien til tall er slående: For $a \neq 0$ får vi $[a \mid 1] \sim [1 \mid \frac{1}{a}]$ ved å dele på $a$ på begge sider.

Forklaringen på hvorfor $A^{-1}$ er matrisen som dukker opp, er følgende: I tilfellet der et likningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der $A$ er en $n \times n$-matrise, har nøyaktig én løsning, finner vi denne løsningen ved radreduseringen

$$[A\ \mathbf{b}] \sim [I_n\ \mathbf{x}].$$

Vi løser nå de $n$ likningssystemene (2.5) simultant, og har dermed radreduseringen

$$[A \mid \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \cdots\ \mathbf{e}_n] \sim [I_n \mid \mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \cdots\ \mathbf{c}_n].$$

Løsningene $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ utgjør kolonnene i matrisen $C$, som vi altså var på jakt etter. Matrisen $C$ er slik at $AC = I_n$, og vi har funnet en invers matrise til $A$ (siden $A$ er inverterbar vet vi også at $CA = I_n$), dvs. $C = [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \cdots\ \mathbf{c}_n] = A^{-1}$ (siden en matrise har høyst en invers).

Dermed får vi altså $A^{-1}$ fra $I_n$ ved å utføre de samme radoperasjonene som reduserer $A$ til $I_n$. $\square$

La oss ta et eksempel:

**Eksempel 2.38** I eksempel 2.36 hadde vi matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

og fant at den inverse matrisen er

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

La oss sjekke at metoden i teorem 2.37 gir oss samme svar:

Vi radreduserer $[M \mid I_2]$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & | & 1 & 0 \\ 3 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}\cdot R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-3\cdot R_1 \text{til} R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & | & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \overset{\frac{2}{3}\cdot R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2}\cdot R_2 \text{til} R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & | & -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

og vi ser at matrisen som dukker opp på høyre side er $M^{-1}$. ■

Vi tar med et $3 \times 3$-eksempel også:

**Eksempel 2.39** Vi vil undersøke om matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

er inverterbar, og i så fall finne $A^{-1}$.

Vi radreduserer $[A \mid I_3]$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-5 \cdot R_2 \text{til} R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & | & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{11} \cdot R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{-2 \cdot R_3 \text{til} R_2 \\ -3 \cdot R_3 \text{til} R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & | & -\frac{15}{11} & 1 & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{11} & 0 & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$\overset{-4 \cdot R_2 \text{til} R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{19}{11} & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{11} & 0 & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

Siden $A \sim I_3$, er $A$ inverterbar, og

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{11} & 1 & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{2}{11} \\ \frac{5}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix},$$

ved teorem 2.37. For å sjekke at radreduseringen er riktig, kan du sjekke at $AA^{-1} = I_3$ (gjør det!), men du trenger ikke å sjekke at $A^{-1}A$ også er lik $I_3$, for siden $A$ er inverterbar, vet vi at det vil stemme. ■

I en av oppgavene blir du bedt om å vise følgende nyttige resultat:

**Teorem 2.40** *La $A$ være en $2 \times 2$-matrise gitt ved*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

*Da er $A$ inverterbar hvis og bare hvis* $\det(A) = ad - bc \neq 0$*. I så fall er $A^{-1}$ gitt ved*

$$A^{-1} = \tfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

**Eksempel 2.41** La $A$ være matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at $\det(A) = -2 \neq 0$, og dermed er $A$ inverterbar ved teorem 2.40. Ved (2.6) får vi

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(sjekk at $AA^{-1} = I_2$!). ■

Hvis koeffisientmatrisen $A$ til et lineært likningssystem (med like mange likninger som variabler) er inverterbar, kan vi bruke den inverse matrisen til å få en formel for løsningen:

**Teorem 2.42** *La $A \in M_n(\mathbb{R})$ være inverterbar og la $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Da har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nøyaktig én løsning, og den er gitt ved $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.*

*Bevis:* Siden $A$ er inverterbar har vi $A \sim I_n$ ved teorem 2.37, og systemet har nøyaktig én løsning. Vi sjekker først at $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ er en løsning ved å sette inn:

$$A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I_n\mathbf{b} = \mathbf{b},$$

dvs. at $A^{-1}\mathbf{b}$ er en løsning av systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Vi må så vise at $A^{-1}\mathbf{b}$ er den eneste løsningen av systemet. Det gjør vi ved å la $\mathbf{v}$ være en vilkårlig løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og vise at $\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{b}$. Vi regner:

$$\begin{aligned}
A\mathbf{v} &= \mathbf{b} \\
A^{-1}(A\mathbf{v}) &= A^{-1}\mathbf{b} \quad \text{(multipliserer med } A^{-1} \text{ siden den fins)} \\
(A^{-1}A)\mathbf{v} &= A^{-1}\mathbf{b} \\
I_n\mathbf{v} &= A^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{v} &= A^{-1}\mathbf{b},
\end{aligned}$$

og dermed er $A^{-1}\mathbf{b}$ den eneste løsningen. $\square$

Formelen $A^{-1}\mathbf{b}$ brukes ikke så ofte til å løse systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, siden radreduseringen av den utvidede matrisen $[A\ \mathbf{b}]$ stort sett vil være raskere. En formel er imidlertid ofte nyttig, og i tilfellet der systemet har 2 likninger og 2 variabler, vil du finne løsningen fortere ved hjelp av $A^{-1}\mathbf{b}$ -hvis du husker formel (2.6):

**Eksempel 2.43** Likningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = -7 \end{cases}$$

har koeffisientmatrise $A$ gitt ved $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, som er inverterbar (se eksempel 2.41). Ved teorem 2.42 er den eneste løsningen til systemet gitt ved

(sjekk!)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(sjekk også ved å radredusere den utvidede matrisen!). ■

## 2.4 Invertibelmatriseteoremet

Selv om vi ikke har vist alle detaljer i denne oppsummeringen, har vi sett konturene av en del sammenhenger. Det kan vises at:

**Teorem 2.44** *La $A$ være i $M_n(\mathbb{R})$ med kolonner $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.* ***Følgende utsagn er ekvivalente****, dvs. for en gitt matrise $A$ er enten alle utsagnene sanne, eller alle er usanne:*

- *$A$ er inverterbar*
- $\det(A) \neq 0$
- *$A$ er radekvivalent med $I_n$, dvs. $A \sim I_n$.*
- *Likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har nøyaktig én løsning for hver vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$.*
- *Likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare den trivielle løsningen ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).*
- *Mengden $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ er lineært uavhengig.*
- *Vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ utspenner $\mathbb{R}^n$.*

Dette resultatet kalles ofte «The Invertible Matrix Theorem», eller *invertibelmatriseteoremet*.

**Eksempel 2.45** I eksempel 2.39 så vi at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

er inverterbar. Dermed vil $A$ oppfylle alle punktene i invertibelmatriseteoremet.

For eksempel vil kolonnene i $A$ danne en lineært uavhengig mengde av vektorer, og de samme vektorene vil utspenne $\mathbb{R}^3$ (sjekk!). ■

## 2.5 Indreprodukt og ortogonale matriser

Vi skal nå se på såkalt ortogonale matriser, som vi også vil treffe igjen i neste kapittel. For slike matriser er den inverse matrisen ekstra grei å finne. Vi starter først med ortogonale vektorer, og for å definere dette trenger vi indreprodukt av vektorer/$n$-tupler.

**Definisjon 2.46** *Et indreprodukt på $\mathbb{R}^n$ er en funksjon som til et par av $n$-tupler, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ og $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, tilordner et reelt tall etter bestemte regler. Det vanligste indreproduktet er det* euklidske indreproduktet*, definert ved*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_1, \ldots, v_n) \cdot (w_1, \ldots, w_n) = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n. \tag{2.7}$$

**Eksempel 2.47** La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være to 3-tupler, $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ og $\mathbf{w} = (1, -1, 3)$. Vi har

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (2, 0, 1) \cdot (1, -1, 3) = 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 2 + 0 + 3 = 5.$$

■

Vi kaller ofte det euklidske indreproduktet for *prikkproduktet*, oppkalt etter prikken, eller multiplikasjonstegnet, i midten av uttrykket. Et indreprodukt har generelt følgende egenskaper for $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ og $k \in \mathbb{R}$:

i) Symmetri: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

ii) Additivitet: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

iii) Homogenitet: $(k\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

iv) Positivitet: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ med likhet hvis og bare hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

**Teorem 2.48** *Det euklidske indreproduktet oppfyller egenskapene i)-iv) ovenfor.*

For bevis, se oppgave 62.

Vi kan tenke på et $n$-tuppel $\mathbf{v}$ som en $n \times 1$-matrise. Den *transponerte* til $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^T$, er $\mathbf{v}$ skrevet som en $1 \times n$-matrise. Vi har dermed

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}.$$

Ved hjelp av den transponerte kan vi skrive prikkproduktet (2.7) som et matriseprodukt siden

$$\mathbf{v}^T\mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n,$$

der vi tolker en $1 \times 1$-matrise som et tall, og skriver det uten parenteser. Vi har altså

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^T\mathbf{w}} \tag{2.8}$$

der høyresiden er uten prikk; det er et matriseprodukt.

Merk at vi kan gjerne definere andre indreprodukt på $\mathbb{R}^n$, f.eks. vil

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

oppfylle egenskapene i)-iv) i starten av denne seksjonen, og dermed definere et indreprodukt på $\mathbb{R}^2$. Symmetrien (egenskap i)) følger av at matrisen i midten er symmetrisk (se definisjon av symmetrisk matrise i seksjon 3.7), mens det vanskeligste å vise, nemlig at indreproduktet er positivt (egenskap iv)) kan man se av utregningen

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 2v_1^2 - 2v_1v_2 + 2v_2^2 = v_1^2 + (v_1 - v_2)^2 + v_2^2$$

Dette uttrykket er aldri negativt, og det er lik 0 hvis og bare hvis $v_1 = v_2 = 0$.

I det videre skal vi holde oss til det euklidske indreproduktet, prikkproduktet, slik det er definert over.

Vi kan bruke prikkproduktet til å definere lengden til en vektor, og vinkelen mellom to vektorer:

**Definisjon 2.49** *(Den euklidske) lengden til en vektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *er gitt ved*

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}},$$

*og vinkelen* $\theta$ *mellom to vektorer* $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *i* $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, *er gitt ved*

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}$$

*der* $\theta \in [0, \pi]$.

**Eksempel 2.50** La $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1, 0, 0)$ og $\mathbf{w} = (0, -1, 1, 0, 1, -1)$ være to vektorer i $\mathbb{R}^6$. Vinkelen mellom dem er gitt ved

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|} = \frac{(1, -1, 1, -1, 0, 0) \cdot (0, -1, 1, 0, 1, -1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

dvs. $\theta = \frac{\pi}{3}$. ■

Vi definerer videre ortogonale vektorer, ortogonal og ortonormal basis:

**Definisjon 2.51** *To vektorer* $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *er ortogonale (eller står normalt på hverandre) dersom prikkproduktet av dem er 0.*

**Definisjon 2.52** *En basis* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *for* $\mathbb{R}^n$ *kalles en ortogonal basis dersom* $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ *for* $i \neq j$. *Dersom vi i tillegg har at* $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ *for alle* $i = 1, 2, \ldots, n$ *så sier vi at basisen er ortonormal.*

Vi merker oss spesielt at standardbasisen er ortogonal siden vi har

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, 1_{(i)}, 0, \ldots, 0) \cdot (0, \ldots, 0, 1_{(j)}, 0, \ldots, 0) = 0$$

for $i \neq j$. Videre er den også ortonormal, siden alle vektorene $\mathbf{e}_i$ har lengde 1.

Vi kan bruke prikkproduktet til å dekomponere vektorer i en ortogonal basis. Vi har følgende resultat:

**Teorem 2.53** *La* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *være en ortogonal basis for* $\mathbb{R}^n$. *La* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *være en vilkårlig vektor. Da har vi:*

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

*der*

$$a_i = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}.$$

*Bevis:* Anta at

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n,$$

$a_i \in \mathbb{R}$. Da har vi for alle $i$ (sjekk!):

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i = a_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i + \cdots + a_n\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_i = a_i|\mathbf{v}_i|^2$$

og det følger at

$$a_i = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|^2}. \quad \square$$

Vi nevner i denne forbindelse at den såkalte ortogonalprojeksjonen av en vektor på en annen vektor er definert ved:

**Definisjon 2.54** *Gitt to vektorer* $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. *Vi definerer ortogonalprojeksjonen av* $\mathbf{v}$ *på* $\mathbf{w}$ *ved*

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\mathbf{w}$$

**Eksempel 2.55** Ortogonalprojeksjonen av $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$ på $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ er gitt ved

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \frac{(2, 1, 0) \cdot (1, 1, 1)}{3}(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

$\blacksquare$

Hvis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^n$ og $\mathbf{w}$ er en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$, kan vi dermed skrive:

$$\mathbf{w} = \mathrm{pr}_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{w}) + \cdots + \mathrm{pr}_{\mathbf{v}_n}(\mathbf{w})$$

Det er flere grunner til at vi er interessert i ortogonale basiser. De er bl.a. lettere å regne med enn mer generelle basiser. I tillegg er det slik at en såkalt symmetrisk matrise tillater en ortogonal basis av egenvektorer. Vi skal komme tilbake til dette i slutten av neste kapittel.

Vi avslutter dette kapittelet med å se på ortogonale matriser. Som nevnt, er dette matriser der den inverse matrisen er ekstra grei å finne:

**Definisjon 2.56** *En matrise* $A$ *kalles ortogonal hvis* $A^{-1} = A^T$.

En ortogonal matrise er altså invertibel (og kvadratisk). Vi minner om at

$A^T$ ($A$ transponert) er matrisen som har $A$s kolonner som rader og $A$s rader som kolonner. Vi har følgende regneregler for transponerte matriser:

**Teorem 2.57** *La $A$ og $B$ være matriser slik at de følgende summene og produktene er definert, og la $k \in \mathbb{R}$. Da har vi:*

*i)* $(A^T)^T = A$

*ii)* $(A+B)^T = A^T + B^T$

*iii)* $(kA)^T = kA^T$

*iv)* $(AB)^T = B^T A^T$

For bevis, se oppgave 63.

Følgende resultat kobler sammen mye av det vi har sett på i denne seksjonen:

**Teorem 2.58** *En kvadratisk matrise $A$ har ortonormale kolonner hvis og bare hvis $A$ er ortogonal.*

*Bevis:* La $A = [a_{ij}]$. Vi har

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ være kolonnene til $A$, dvs. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$, osv. Da har vi

$$A^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_n^T\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n^T\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n^T\mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

Vi gjenkjenner komponentene i matrisen $A^T A$ som indreprodukter; $\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1$ osv. Kolonnene i $A$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, er ortonormale hvis og bare hvis $\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j = 0$ for $i \neq j$, og $\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i = 1$ for $1 \leq i \leq n$, som vil si at $A^T A$ er identitetsmatrisen, dvs. at $A$ er ortogonal. $\square$

## 2.6 Nå skal du kunne

- definisjonen av kvadratisk matrise, hoveddiagonal/diagonal, trappeformen til en matrise, vinkelen mellom to vektorer i $\mathbb{R}^2$, positiv og negativ orientering av et 2-tuppel av vektorer i $\mathbb{R}^2$, et lineært område i $\mathbb{R}^2$, invers matrise, inverterbar/invertibel matrise, singulær matrise, det euklidske indreproduktet, ortogonale vektorer, ortogonal basis, ortogonalprojeksjon, ortogonal matrise

- regne ut determinanten til en diagonal matrise og en øvre triangulær matrise

- vite hva som skjer med determinanten til en matrise når den utsettes for hver av de tre radoperasjonene, spesielt gi en algebraisk og geometrisk forklaring på dette for $2 \times 2$-matriser

- metoden for å regne ut determinanten ved hjelp av radoperasjoner

- metoden for å invertere en matrise ved hjelp av radoperasjoner

- formelen for den inverse til en $2 \times 2$-matrise
- løse lineære likningssystemer med 2 likninger og 2 variabler mye fortere enn før (ta tiden!)
- gi en nærmere forklaring på teorem 2.15 (determinanter og likningssystemer) og teorem 2.19 (geometrisk tolkning av determinanter i $\mathbb{R}^2$), og gjerne prøve deg på en forklaring av invertibelmatriseteoremet også

## 2.7 Oppgaver, kapittel 2

**Oppgave 33** Regn ut determinantene

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

**Oppgave 34** Finn arealet til parallellogrammet utspent av $\mathbf{a} = (1, 3)$ og $\mathbf{b} = (4, 1)$.

**Oppgave 35** En trekant har hjørner i punktene $(-1, 2)$, $(4, 3)$, $(1, 7)$. Finn arealet.

**Oppgave 36** En firkant har hjørner i punktene $(0, 1)$, $(5, 1)$, $(1, 7)$ og $(7, 4)$. Finn arealet.

**Oppgave 37** Avgjør om parene $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt eller negativt orientert:

a) $\mathbf{a} = (3, -1)$ $\mathbf{b} = (-7, 2)$ b) $\mathbf{a} = (-1, 5)$ $\mathbf{b} = (3, 2)$

**Oppgave 38** Vis at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ hvis og bare hvis vektorene $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ er parallelle eller (minst) én av dem er $\mathbf{0}$.

**Oppgave 39** Alle hjørnene til et parallellogram har heltallige koordinater. Vis at arealet er et helt tall.

**Oppgave 40** Anta at $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

a) Vis at likningssystemet $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ har løsningen

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

b) Hva skjer med likningssystemet når $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$?

**Oppgave 41** Regn ut determinantene ved hjelp av radoperasjoner:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ f) $\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

**Oppgave 42** Vis at $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, dvs. at determinanten er den samme om vi bytter om kolonner og rader.

**Oppgave 43** Regn ut determinanten til $4 \times 4$-matrisen ved hjelp av radoperasjoner:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 44** I denne oppgaven er $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$ tredimensjonale vektorer.

a) Vis at dersom to av vektorene $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ er like, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

b) Vis at for alle vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ og alle skalarer $s$, $t$ gjelder

$$\det(s\mathbf{a} + t\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = s \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + t \det(\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

c) Bruk a) og b) til å vise at dersom $\mathbf{a}$ er en lineær kombinasjon av $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

**Oppgave 45** Vis at dersom $A$ er en $n \times n$-matrise og $r$ er et tall, så er $\det(rA) = r^n \det(A)$.

**Oppgave 46** Vis at dersom radene til $A$ er lineært avhengige, så er $\det(A) = 0$. (*Hint:* Bruk radoperasjoner til å skaffe deg en rad som bare består av nuller).

**Oppgave 47** I denne oppgaven skal vi bruke følgende notasjon: Dersom $A$ er en $n \times n$-matrise og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ er en kolonnevektor, så er $A_i(\mathbf{b})$ matrisen vi får når vi erstatter den $i$-te kolonnen til $A$ med $\mathbf{b}$.

*Cramers regel* sier følgende: Hvis $A$ er inverterbar, så er løsningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

til likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

(vi møtte Cramers regel i MAT1001 - se seksjon 3.7 i *Matematisk verktøykasse*).

a) Vis at dersom $I$ er $n \times n$-identitetsmatrisen, så er $\det(I_i(\mathbf{x})) = x_i$.

b) Vis at $AI_i(\mathbf{x}) = A_i(\mathbf{b})$.

c) Bevis Cramers regel. (*Hint:* Bruk at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ - du må gjerne prøve å vise dette også.)

d) Bruk Cramers regel til å løse likningssystemet

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - 4y = -2. \end{cases}$$

**Oppgave 48** La $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Kontroller at $AI_2 = A$ og $I_2A = A$ ved å gjennomføre utregningene.

**Oppgave 49** La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$. Vis at $B = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ er den inverse matrisen til $A$ ved å regne ut $AB$ og $BA$.

**Oppgave 50** Avgjør om følgende matriser er inverterbare eller singulære:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 51** En inverterbar matrise $A$ har en invers matrise som er gitt ved $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Finn matrisen $A$.

**Oppgave 52** Finn den inverse matrisen dersom den finnes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

**Oppgave 53** Finn den inverse matrisen dersom den finnes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 16 & -6 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

**Oppgave 54** Gitt to inverterbare matriser $A$ og $B$, hvor $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ og $B^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Finn $(AB)^{-1}$.

**Oppgave 55** La $A$ og $B$ være to inverterbare matriser. Vis at $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**Oppgave 56** a) Anta at $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ der $a, b \neq 0$. Vis at $A$ er inverterbar og at $A^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$.

b) Anta at $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ der $a, b, c \neq 0$. Vis at $B$ er inverterbar og at

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{bmatrix}.$$

c) Formuler et tilsvarende resultat for $n \times n$-matriser.

**Oppgave 57** I denne opppgaven skal du vise teorem 2.40.

a) Vis at $2 \times 2$-matrisen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er inverterbar hvis og bare hvis $ad - bc \neq 0$, og at den inverse matrisen i så fall er gitt ved $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

b) Bruk formelen fra punkt a) til å finne den inverse til matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

c) Bruk matrisen du fant i punkt b) til å løse likningssystemet

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -x + 3y = 2. \end{cases}$$

*Hint:* Systemet kan skrives $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

**Oppgave 58** (Eksamen i MAT1110, 14/6 2004, litt tilpasset)

a) Finn den inverse matrisen til

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Bruk resultatet i a) til å løse likningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + z = 3 \\ -2y + z = 3. \end{cases}$$

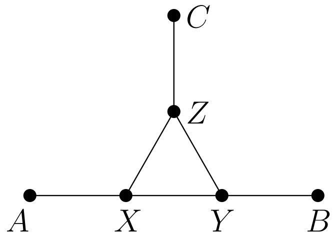
c) For hvilke verdier av $a$ og $b$ har likningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + z = 3 \\ -2y + (a+1)z = b^2 - 10 \end{cases}$$

henholdsvis én, ingen og uendelig mange løsninger?

**Oppgave 59** Anta at $A$ er en inverterbar $n \times n$-matrise, og at $\mathbf{b}$ er en radvektor med $n$ komponenter. Vis at $\mathbf{x} = \mathbf{b}A^{-1}$ er den entydige løsningen til likningen $\mathbf{x}A = \mathbf{b}$.

**Oppgave 60** Figuren nedenfor viser et elektrisk nettverk. Man kan regulere spenningen i de ytre punktene $A$, $B$ og $C$, men spenningen i de indre punktene $X$, $Y$ og $Z$ er alltid gjennomsnittet av spenningen i nabopunktene.




a) La $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ være spenningen i henholdsvis $A$, $B$, $C$, $X$, $Y$ og $Z$. Vis at dersom

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

så er $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Finn $A^{-1}$.

c) Finn $x$, $y$ og $z$ når $a = 1$, $b = 2$ og $c = 3$.

d) Hvordan skal du velge de ytre spenningene $a$, $b$ og $c$ for å få $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$?

**Oppgave 61** Regn ut følgende indreprodukter:

a) $(1, -1, 2) \cdot (4, 2, -1)$

b) $(1, 2, 3, 4) \cdot (-1, -2, -3, -4)$

c) $(0, 2, -1, \frac{1}{2}) \cdot (1, 1, 3, 2)$

**Oppgave 62** Vis teorem 2.48. (Bruk gjerne (2.8) og teorem 2.57.)

**Oppgave 63** Vis teorem 2.57.

## 2.8 Fasit, kapittel 2

**Oppgave 33** a) 14 b) 38 c) 0

**Oppgave 34** 11

**Oppgave 35** $\frac{23}{2}$

**Oppgave 36** 27

**Oppgave 37** a) negativt, b) negativt

**Oppgave 38** Hint: Tolk determinanten som et areal.

**Oppgave 39** Hint: Utrykk arealet som en determinant.

**Oppgave 40** b) Likningssystemet har enten ingen eller uendelig mange løsninger avhengig av konstantene $c_1$ og $c_2$. Linjene $a_1x + b_1y = c_1$ og $a_2x + b_2y = c_2$ er enten parallelle (ingen løsninger) eller sammenfallende (uendelig mange løsninger).

**Oppgave 41** a) 84 b) 20 c) 0 d) 9 e) $-9$ f) $-9$

**Opppgave 42** ikke fasit

**Oppgave 43** $-127$

**Oppgave 44** ikke fasit

**Oppgave 45** ikke fasit

**Oppgave 46** ikke fasit

**Oppgave 47** d) $x = \frac{22}{5}, y = \frac{8}{5}$

**Oppgave 48** ikke fasit

**Opppgave 49** ikke fasit

**Oppgave 50** Matrisene $A$, $B$ og $D$ er inverterbare med inverse matriser $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$, $D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.75 & -0.5 \end{bmatrix}$

Matrisen $C$ er singulær.

**Oppgave 51** $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

**Oppgave 52** a) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ c) Ikke inverterbar

**Oppgave 53** a) $\begin{bmatrix} 0 & -0.6 & 0.2 \\ -1 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0.2 & -0.4 \end{bmatrix}$, b) Ikke inverterbar, c) $\begin{bmatrix} 0.75 & -1.5 & -0.25 \\ 1.25 & -1.5 & -0.75 \\ -0.5 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$,
d) $\begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$

**Oppgave 54** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & 59 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$

**Oppgave 55** ikke fasit

**Oppgave 56** ikke fasit

**Oppgave 57** b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
c) Multipliserer vi med $A^{-1}$ på begge sider av matriselikningen, får vi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 7 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 58** a) $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $x = 5, y = 0, z = 3$

c) Én løsning for $a \neq -3$ (uansett $b$). Når $a = -3$, er det uendelig mange løsninger når $b = \pm 2$, og ingen løsninger når $b \neq \pm 2$

**Oppgave 59** ikke fasit

**Oppgave 60** b) $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $x = \frac{7}{4}, y = 2, z = \frac{9}{4}$

d) $a = -2$, $b = 2$, $c = 6$

**Opppgave 61** a) 0 b) $-30$ c) 0

**Oppgave 62** ikke fasit

**Oppgave 63** ikke fasit

# Kapittel 3

# Mer om egenverdier og egenvektorer

I neste kapittel skal vi lære å løse *systemer* av difflikninger. Da vil vi trenge egenverdier og egenvektorer, og selv om vi skal løse reelle problemer, vil vi trenge å jobbe i den komplekse verdenen underveis.

## 3.1 Komplekse $n$-tupler og vektorer

Vi husker at et komplekst tall $z$ er et tall på formen $z = a+ib$, der $a, b \in \mathbb{R}$ og $i^2 = -1$. Vi regner med disse tallene akkurat som reelle tall, bare vi husker at $i^2 = -1$.

**Definisjon 3.1** *Et komplekst tuppel av lengde $n$, eller et komplekst $n$-tuppel, skrevet $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, er $n$ komplekse tall ordnet i en bestemt rekkefølge.*

Som for (reelle) tupler (se f.eks. seksjon 1.2 i *Matematisk verktøykasse*), kalles de komplekse tallene $z_i$ som forekommer i tuppelet, *komponentene* til tuppelet. To komplekse $n$-tupler er like hvis de er komponentvis like, og vi kan ikke sammenligne komplekse tupler av ulik lengde.

Mengden av alle komplekse $n$-tupler betegnes med $\mathbb{C}^n$, det $n$-dimensjonale komplekse rommet:

$$\mathbb{C}^n = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \colon z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}$$

Vi definerer addisjon og multiplikasjon med en skalar for komplekse tupler komponentvis, dvs. helt tilsvarende som for reelle tupler. Legg merke til at *skalarene nå kan være komplekse tall*:

**Definisjon 3.2** *La* $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *og* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *være to komplekse $n$-tupler, og la $c \in \mathbb{C}$. Vi definerer*

$$\begin{aligned} &\mathbf{z} + \mathbf{w} = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots, z_n + w_n); \\ &c\mathbf{z} = (cz_1, cz_2, \ldots, cz_n). \end{aligned}$$

Vi kan ikke addere komplekse tupler av ulik lengde.

Vi kan dermed regne ut lineære kombinasjoner av komplekse tupler (av lik lengde):

**Eksempel 3.3** La $\mathbf{z} = (1, 1+i, i)$ og $\mathbf{w} = (2, 0, 3-i)$. Vi vil finne den lineære kombinasjonen $c\mathbf{z} + d\mathbf{w}$ for $c = 2$ og $d = \frac{1}{2} - 3i$ (husk $i^2 = -1$). Vi får

$$\begin{aligned} 2\mathbf{z} + (\tfrac{1}{2} - 3i)\mathbf{w} = &\ 2(1, 1+i, i) + (\tfrac{1}{2} - 3i)(2, 0, 3-i) \\ = &\ (2, 2+2i, 2i) + (1 - 6i, 0, -\tfrac{3}{2} - \tfrac{19}{2}i) \\ = &\ (3 - 6i, 2 + 2i, -\tfrac{3}{2} - \tfrac{15}{2}i), \end{aligned}$$

som er et nytt komplekst 3-tuppel. ■

Tilsvarende som for reelle tupler, vil vi tenke på komplekse $n$-tupler som komplekse vektorer i $\mathbb{C}^n$, og siden vi skal multiplisere dem med matriser fra venstre, bestemmer vi oss for å skrive komplekse $n$-tupler som komplekse *kolonne*vektorer, dvs.

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Forskjellen fra reelle tupler, er at komponentene $z_i$ nå har en realdel og en imaginærdel. Dermed vil vektoren også ha det. Realdelen og imaginærdelen til en kompleks vektor er de to vektorene som har komponenter bestående av henholdsvis realdelene og imaginærdelene til komponentene til vektoren:

**Definisjon 3.4** *La* $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ *være en kompleks vektor med komponenter* $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2, \ldots, z_n = a_n + ib_n$. *Realdelen og imaginærdelen til* $\mathbf{z}$ *er vektorene* $\mathrm{Re}(\mathbf{z})$ *og* $\mathrm{Im}(\mathbf{z})$ *gitt ved*

$$\mathrm{Re}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(z_1) \\ \mathrm{Re}(z_2) \\ \vdots \\ \mathrm{Re}(z_n) \end{bmatrix},$$

*og*

$$\mathrm{Im}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Im}(z_1) \\ \mathrm{Im}(z_2) \\ \vdots \\ \mathrm{Im}(z_n) \end{bmatrix}.$$

*Merk at* $\mathrm{Re}(\mathbf{z})$ *og* $\mathrm{Im}(\mathbf{z})$ *er reelle vektorer og at* $\mathbf{z}$ *kan skrives*

$$\mathbf{z} = \mathrm{Re}(\mathbf{z}) + i\,\mathrm{Im}(\mathbf{z}).$$

Vi kan også definere konjugasjon for komplekse vektorer.

**Definisjon 3.5** *La* $\mathbf{z} = \mathrm{Re}(\mathbf{z}) + i\,\mathrm{Im}(\mathbf{z})$ *være en kompleks vektor. Vektoren* $\overline{\mathbf{z}} = \mathrm{Re}(\mathbf{z}) - i\,\mathrm{Im}(\mathbf{z})$ *kalles den konjugerte vektoren til* $\mathbf{z}$.
*Merk at hvis* $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, *så blir da* $\overline{\mathbf{z}} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n})$.

Vi får dermed den konjugerte til en kompleks vektor ved å konjugere komponentvis.

**Eksempel 3.6** Vektoren $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2-i \\ 4 \\ -i \end{bmatrix}$ kan skrives som

$$\begin{bmatrix} 2-i \\ 4 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

og vi har

$$\mathrm{Re}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Den konjugerte vektoren til $\mathbf{z}$ er

$$\overline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i \\ 4 \\ i \end{bmatrix}.$$

■

Vi skal snart jobbe med komplekse vektorer, mens matrisene vi skal studere vil være reelle. Det er imidlertid ingenting i veien for å ha *komplekse matriser* også, dvs. at komponentene i matrisen kan være komplekse tall, og siden vi vil trenge en regneregel der konjugasjon av en matrise forekommer, tar vi med følgende:

**Definisjon 3.7** *La $A$ være en kompleks matrise. Den konjugerte matrisen til $A$, skrevet $\overline{A}$, er matrisen der komponentene er de konjugerte til komponentene til $A$.*

Konjugasjon for komplekse vektorer, som er en $n \times 1$-matrise, er dermed et spesialtilfelle av denne definisjonen.

**Eksempel 3.8**

$$\overline{\begin{bmatrix} 2-i & -3 \\ 4i & 3+8i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \overline{2-i} & \overline{-3} \\ \overline{4i} & \overline{3+8i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i & -3 \\ -4i & 3-8i \end{bmatrix}$$

$\blacksquare$

Vi har følgende regneregler for kompleks konjugasjon av vektorer og matriser:

**Teorem 3.9** *La $A$ og $B$ være komplekse matriser og $\mathbf{z}$ en kompleks vektor slik at produktene nedenfor har mening. La $c \in \mathbb{C}$. Da har vi følgende regneregler*

- $\overline{cA} = \overline{c} \cdot \overline{A}$
- $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
- $\overline{c\mathbf{z}} = \overline{c} \cdot \overline{\mathbf{z}}$
- $\overline{A\mathbf{z}} = \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{z}}$

## 3.2 Algebraens fundamentalteorem

I denne seksjonen skal vi ta med et resultat som er, som tittelen sier, fundamentalt for algebra. Ordet algebra stammer fra det arabiske *al-jabr* som betyr «å sette sammen». Mens aritmetikken dreier seg om tallregning, handler algebra om å regne med symboler, og teorien utviklet seg via jakten på å løse likninger.

Vi vil trenge å vite litt om teorien for løsning av algebraiske likninger:

**Definisjon 3.10** *Et $n$-te grads polynom $P(z)$ i variabelen $z$,dvs.*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0$$

*der $c_n \neq 0$, kalles et reelt polynom hvis koeffisientene $c_0, c_1 \ldots, c_n$ er reelle tall, og et komplekst polynom hvis koeffisientene er komplekse tall.*
*En algebraisk $n$-te grads likning i variabelen $z$ er en likning på formen*

$$P(z) = 0$$

*(der $P(z)$ er et $n$-te grads polynom).*

**Bemerkning 3.11** Vi snakker ofte bare om en «likning» i betydningen en algebraisk likning, dvs. vi dropper ofte ordet «algebraisk».

Husk også at reelle tall kan ses på som komplekse tall der imaginærdelen er lik 0, så begrepet komplekst polynom omfatter også reelle polynomer. ■

Vi kjenner allerede meget godt til andregradslikninger $az^2+bz+c = 0$, og vi innførte komplekse tall nettopp for å kunne løse alle slike likninger. Men komplekse tall viser seg å kunne brukes til mye mer enn bare det. De gjør oss nemlig i stand til å løse *alle* algebraiske likninger, altså av hvilken som helst grad! Det er dette resultatet som kalles *algebraens fundamentalteorem*:

**Teorem 3.12** ***(Algebraens fundamentalteorem)*** *La*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0$$

*være et komplekst $n$-te grads polynom der $n \geq 1$ og $c_n \neq 0$. Da finnes det komplekse tall $w_1, w_2, \ldots w_n$ slik at*

$$P(z) = c_n(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_n) \tag{3.1}$$

*for alle komplekse tall $z$. Bortsett fra rekkefølgen er faktorene $(z - w_1), (z - w_2), \ldots, (z - w_n)$ entydig bestemt.*

Teorem 3.12 ble bevist av Carl Friedrich Gauss i 1799, men beviset er såpass vanskelig at mange bruker dette resultatet uten at de ser et bevis for det. Vi skal ikke bevise algebraens fundamentalteorem i dette kurset.

Her er imidlertid noen **viktige** bemerkninger til teoremet:

**Bemerkning 3.13** Første del av teoremet gir at $w_1, w_2, \ldots, w_n$ er løsninger til likningen $P(z) = 0$. Disse kalles også røttene til polynomet $P(z)$. (Dette er «eksistensdelen» av resultatet.)

Legg merke til at resultatet sier ingen ting om hvordan vi finner disse løsningene, dvs. hvordan røttene $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ser ut!

Den andre delen av resultatet gir at det fins ingen andre røtter til $P(z)$ enn $w_1, w_2, \ldots, w_n$, dvs. de er entydige/unike bortsett fra rekkefølgen. (Det er «entydighetsdelen» av teoremet.) Det at rekkefølgen ikke er unik, skyldes at multiplikasjon i $\mathbb{C}$ er kommutativ, slik at f.eks.
$(z - w_1)(z - w_2) = (z - w_2)(z - w_1)$.

Vi legger videre merke til at røttene $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ikke trenger å være forskjellige, dvs. en rot $w_i$ kan godt forekomme flere ganger i faktoriseringen

(3.1).

**Definisjon 3.14** *Antall ganger en rot $w_i$ forekommer i faktoriseringen (3.1) kalles (den algebraiske)* multiplisiteten *til roten.*

■

**Eksempel 3.15** Polynomet gitt ved

$$P(z) = z(z-1)^3(z-i)^2(z+i)$$

er faktorisert på formen (3.1), og vi kan lese av røttene til polynomet og de tilhørende multiplisitetene.

Polynomet har røttene $z = 0$ med multiplisitet 1, $z = 1$ med multiplisitet 3, $z = i$ med multiplisitet 2 og $z = -i$ med multiplisitet 1. ■

En umiddelbar konsekvens av fundamentalteoremet er følgende

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Summen av multiplisitetene til røttene til et}\\ n\text{-te grads polynom er alltid } n.\end{array}} \tag{3.2}$$

Som sagt, reelle polynomer og likninger omfattes også av teorem 3.12:

**Eksempel 3.16** La $P(z) = z^3 - z^2 - 8z + 12$. Ved å prøve oss frem, finner vi at $z = 2$ er en rot. Vi kommer videre f.eks. ved hjelp av polynomdivisjon: At $P(2) = 0$ betyr at $z - 2$ er en faktor i $P(z)$, slik at vi kan «dele» $P(z)$ med $z - 2$. La oss ta med den utregningen:

$$\begin{array}{l}
\;\; z^3 - z^2 - 8z + 12 \; : \; z - 2 = z^2 + z - 6 \\
\underline{-(z^3 - 2z^2)} \\
\qquad z^2 - 8z + 12 \\
\quad \underline{-(z^2 - 2z)} \\
\qquad\quad -6z + 12 \\
\qquad \underline{-(-6z + 12)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Det betyr at $z^3 - z^2 - 8z + 12 = (z-2)(z^2 + z - 6)$. Ved å løse andregradslikningen $z^2 + z - 6$, finner vi at de to andre røttene er $z = -3$ og $z = 2$.

Dette gir at

$$P(z) = (z-2)(z-2)(z+3) = (z-2)^2(z+3),$$

og vi ser at roten 2 har multiplisitet 2, mens roten $-3$ har multiplisitet 1. Summen av multiplisitetene er 3, noe som stemmer for et tredjegradspolynom. ■

**Eksempel 3.17** Polynomet $P(z) = z^4 + 6z^2 + 5$ kan faktoriseres som $(z^2+1)(z^2+5)$ (ved å sette $x = z^2$ får vi andregradslikningen $x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5)$). Likningen $z^2 + 1$ har røtter $\pm i$, mens likningen $z^2 + 5$ har røtter $\pm i\sqrt{5}$, som til sammen gir de fire røttene til fjerdegradspolynomet. Det gir faktoriseringen

$$z^4 + 6z^2 + 5 = (z-i)(z+i)(z-i\sqrt{5})(z+i\sqrt{5}).$$

■

Vi skal som sagt være spesielt interessert i *reelle* polynomer. Det kan dermed være lurt å merke seg følgende resultat:

**Teorem 3.18** *Vi har:*

1) *Hvis $w$ er rot i et* ***reelt*** *polynom, vil $\overline{w}$ også være en rot i polynomet.*

2) *To konjugerte røtter til et* ***reelt*** *polynom har alltid samme multiplisitet.*

3) *Ethvert* ***reelt*** *polynom av odde grad har alltid minst en reell rot.*

Punkt 1) skal vi vise for et spesielt polynom i neste seksjon. Sjekk at teorem 3.18 stemmer med faktoriseringene i eksempel 3.16 og eksempel 3.17 (og sjekk gjerne noen andre polynomer også).

**Eksempel 3.19** Teorem 3.18 gir følgende muligheter for røttene til et reelt tredjegradspolynom (overbevis deg om dette!):

- tre reelle røtter, herunder tilfellene

- én rot som har multiplisitet lik 3;
  - to forskjellige røtter som har multiplisitet henholdsvis lik 1 og 2;
  - tre forskjellige røtter som alle har multiplisitet lik 1;
- én reell rot, og to komplekse røtter, som er kompleks konjugerte av hverandre.

■

## 3.3 (Komplekse) egenverdier og egenvektorer

Vi husker fra MAT1001 at egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til en matrise $A$ er noen egne/spesielle verdier og vektorer knyttet til matrisen. Det er de verdiene $\lambda$ og de vektorene $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, som tilfredsstiller likningen

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Fra Invertibelmatriseteoremet får vi at egenverdiene $\lambda$ til matrisen $A$ kan vi finne ved å løse den karakteristiske likningen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

**Bemerkning 3.20** Viktig! Siden vi skal løse reelle problemer, vil matrisene vi er interessert i være reelle. Det betyr at komponentene er reelle tall, og dermed er den karakteristiske likningen til en $n \times n$-matrise en algebraisk likning av grad $n$, der polynomet $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ er et *reelt* polynom. Det betyr at teorem 3.18 kan brukes. Dessuten sier algebraens fundamentalteorem at vi vil alltid ha $n$ (muligens komplekse) røtter. ■

I MAT1001 jobbet vi kun med reelle egenverdier, og da vet vi bare at en $n \times n$-matrise har høyst $n$ egenverdier. Ved å tillate komplekse tall, vil en $n \times n$-matrise ha nøyaktig $n$ egenverdier *dersom disse telles i henhold til multiplisiteten egenverdiene får som røtter i den karakteristiske likningen.*

Vi må nå altså være forberedt på at både egenverdiene og egenvektorene kan være komplekse.

**Bemerkning 3.21** For å huske at vi nå tillater komplekse løsninger, vil vi ofte bruke $\mathbf{z}$ istedenfor $\mathbf{x}$ for egenvektorene. I tilfellet der alle egenverdiene er reelle, vil egenvektorene også være det, og vi bruker da fortsatt $\mathbf{x}$ for egenvektorene. ■

Når vi skal finne de ulike egenvektorene skal vi løse likningssystemet

$$A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}, \quad \text{der } \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

for hver egenverdi $\lambda$ (slik vi gjorde i MAT1001). Ved å multiplisere med en identitetsmatrise $I$, kan vi skrive dette systemet som

$$A\mathbf{z} = \lambda I\mathbf{z},$$

og dermed få systemet

$$(A - \lambda I)\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{3.3}$$

Dette gir følgende (nye) **metode for å finne egenvektorene**:

| For hver egenverdi $\lambda$ til matrisen $A$ finner vi de tilhørende egenvektorene ved å finne de ikke-trivielle løsningene til systemet (3.3). |
|---|

(3.4)

**Bemerkning 3.22** Vi kan også si at de tilhørende egenvektorene til egenverdien $\lambda$ finner vi ved å bestemme nullrommet $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$, der vi holder nullvektoren utenfor. Dette er noe vi skal se nærmere på i neste seksjon. ■

I forhold til metoden vi brukte i MAT1001, er denne metoden litt mer i tråd med tankegangen i kurset MAT1012, så la oss se noen eksempler der vi bruker «den nye metoden»:

**Eksempel 3.23** Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (10-\lambda)(-2-\lambda)+36 \\ &= \lambda^2-8\lambda+16 \\ &= (\lambda-4)^2.\end{aligned}$$

Den karakteristiske likningen $(\lambda-4)^2=0$ har én løsning, $\lambda=4$, dvs. at $A$ har (kun) egenverdien 4, med multiplisitet 2.

Vi vil nå finne de tilhørende egenvektorene for $\underline{\lambda=4}$. Det betyr at vi skal løse likningssystemet

$$(A-4I_2)\mathbf{x}=\mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{x}\neq\mathbf{0}.$$

Vi har at

$$A-4I_2 = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix},$$

og dermed er den utvidede matrisen til systemet vi skal løse gitt ved

$$\begin{bmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Radredusering gir (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir løsninger (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{der } s\in\mathbb{R}, s\neq 0,$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda=4$. ■

Vi tar et eksempel der vi får komplekse løsninger:

**Eksempel 3.24** Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske likningen er (sjekk!) $\lambda^2 - 2\lambda + 26 = 0$, som har løsningsmengde (sjekk!) $\{1 + 5i, 1 - 5i\}$, dvs. at $A$ har komplekse egenverdier, $\lambda = 1 + 5i$ eller $\lambda = 1 - 5i$.

For hver egenverdi finner vi de tilhørende egenvektorene:

$\underline{\lambda = 1 + 5i}$:

Vi skal løse

$$(A - (1 + 5i)I_2)\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{z} \neq \mathbf{0},$$

som gir utvidet matrise (vi trekker fra $1 + 5i$ på diagonalen til $A$)

$$\begin{bmatrix} -5i & -5 & 0 \\ 5 & -5i & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi radreduserer (sjekk! -vi regner som vanlig, og husker at $i^2 = -1$):

$$\begin{bmatrix} -5i & -5 & 0 \\ 5 & -5i & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 5 & -5i & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir løsninger

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{der } s \in \mathbb{C}, s \neq 0,$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda = 1 + 5i$.

$\underline{\lambda = 1 - 5i}$:

Vi skal nå løse

$$(A - (1 - 5i)I_2)\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{z} \neq \mathbf{0}.$$

Den utvidede matrisen er nå (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 5i & -5 & 0 \\ 5 & 5i & 0 \end{bmatrix},$$

som radreduseres til (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dermed får vi løsninger

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{der } s \in \mathbb{C}, s \neq 0,$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda = 1 - 5i$. ■

Se på eksempel 3.24 en gang til. Vi ser at den eneste forskjellen i utregningene for de to egenvektorene, er at vi bytter fortegn foran imaginærdelene, dvs. vi konjugerer. Og enda mer; egenverdiene er også konjugerte av hverandre.

Dette er et generelt resultat:

**Teorem 3.25** *La $A$ være i $M_n(\mathbb{R})$. Hvis $\lambda$ er en egenverdi for $A$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{z}$, så er $\overline{\lambda}$ også en egenverdi for $A$, med tilhørende egenvektor $\overline{\mathbf{z}}$.*

*Bevis:* La $\lambda$ være en egenverdi for $A$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{z}$, dvs. $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ og $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$. Ved å bruke regneregler for konjugasjon (se teorem 3.9) og at $A$ er reell, dvs. $A = \overline{A}$, får vi (sjekk!)

$$A\overline{\mathbf{z}} = \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{z}} = \overline{A\mathbf{z}} = \overline{\lambda\mathbf{z}} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\mathbf{z}}.$$

Nå er $\overline{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$ siden $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Så $\overline{\lambda}$ er en egenverdi for $A$ med tilhørende egenvektor $\overline{\mathbf{z}}$. □

Vi tar et eksempel med en $3 \times 3$-matrise der vi får to komplekse egenverdier:

**Eksempel 3.26** Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske likningen er (sjekk!)

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3+4(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5) = 0.$$

Andregradslikningen $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ har løsningsmengde (sjekk!) $\{1+2i, 1-2i\}$, dvs. at $A$ har egenverdiene $\lambda = 1$, $\lambda = 1+2i$ eller $\lambda = 1-2i$.

Vi ser at dette stemmer med at det karakteristiske polynomet er et reelt tredjegradspolynom, som har minst én reell rot, og de komplekse røttene er konjugerte av hverandre, dvs. dette stemmer med teorem 3.18 til punkt og prikke (sjekk!).

For hver egenverdi finner vi de tilhørende egenvektorene:

$\underline{\lambda = 1}$:

Vi skal løse

$$(A - I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Det gir utvidet matrise (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ved hjelp av radoperasjoner reduseres denne matrisen til (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dermed får vi løsninger (vi mulitipliserer opp med 2, for å få litt «penere» svar)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{der } s \in \mathbb{R}, s \neq 0,$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda = 1$.

$\underline{\lambda = 1 + 2i}$:

Vi skal nå løse

$$(A - (1+2i)I_3)\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{z} \neq \mathbf{0}.$$

Vi får følgende radredusering:

$$\begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2i & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2i & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{-\frac{1}{2i}R_1 \\ \frac{1}{2}R_3 \leftrightarrow \frac{1}{2}R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -i & 0 \\ 2 & -i & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{(-1)\cdot R_1 \text{til} R_2 \\ (-2)\cdot R_1 \text{til} R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{i\cdot R_2 \text{til} R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir følgende løsninger:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{der } s \in \mathbb{C}, s \neq 0,$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda = 1 + 2i$.

$\underline{\lambda = 1 - 2i}$:

Vi kan nå bruke teorem 3.25. Det gir at egenvektorene tilhørende $\lambda = 1 - 2i$ er gitt ved de konjugerte egenvektorene tilhørende $\lambda = 1 + 2i$, dvs. vektorene

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{der } s \in \mathbb{C}, s \neq 0.$$

Vi kan sjekke at dette stemmer ved å regne ut at

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = (1-2i) \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

(gjør det!). ■

Når vi regner ut egenverdier og -vektorer for hånd, ser vi at den karakteristiske likningen vil gi oss begrensninger. For en $n \times n$-matrise får vi å løse en $n$-tegradslikning for å finne egenverdiene. Dersom $n$ er stor er dette vanskelig, og man må da som regel ty til en programpakke (Matlab, Maple e.l.).

Som sagt i Bemerkning 3.20 studerer vi *reelle* matriser. Reelle matriser vil ofte ha komplekse egenverdier og -vektorer, og vi skal treffe igjen slike matriser i neste kapittel.

**I resten av dette kapittelet skal vi nå konsentrere oss om matriser der alle egenverdiene, og dermed egenvektorene, er reelle.**

Et eksempel på reelle matriser med reelle egenverdier er reelle **diagonale matriser**:

**Lemma 3.27** *En diagonal $n \times n$-matrise $D$ gitt ved*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

*har egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.*

*Bevis:* Det karakteristiske polynomet er (sjekk!)

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = 0. \qquad \square$$

Egenvektorene til en diagonal matrise er også ekstra greie å finne. Vi tar et eksempel:

**Eksempel 3.28** Matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

har egenverdiene 2 med multiplisitet 2, og 0 og $-1$ med multiplisitet 1. De tilhørende egenvektorene for $\underline{\lambda = 2}$ er (sjekk!)

$$\boxed{s\,\mathbf{e}_1 + t\,\mathbf{e}_4, \quad \text{der } s, t \neq 0},$$

for $\underline{\lambda = 0}$ er egenvektorene $\boxed{s\,\mathbf{e}_2, s \neq 0}$ og for $\underline{\lambda = -1}$ $\boxed{s\,\mathbf{e}_3, s \neq 0}$. Siden matrisen er $4 \times 4$, er egenvektorene vektorer i $\mathbb{R}^4$. (Sjekk at $D\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ for alle egenverdiene!) ■

Vi nevner også hva det betyr **at** 0 **er en egenverdi til en matrise** $A$: I så tilfelle har vi oppfylt likningen

$$A\mathbf{z} = 0\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{z} \neq \mathbf{0},$$

dvs. at likningssystemet $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger. Ved nvertibelmatriseteoremet betyr dette at $A$ ikke er inverterbar. Vi har dermed fått enda en karakterisering av **en inverterbar matrise**:

- Tallet 0 er *ikke* en egenverdi for $A$.

Dette gir et ekstra punkt vi kan tilføye i invertibelmatriseteoremet på slutten av kapittel 2.

**Eksempel 3.29** Matrisen $D$ i eksempel 3.28 har 0 som egenverdi, dermed er $D$ ikke inverterbar. La $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ og $\mathbf{d}_4$ være kolonnene til $D$. Du kan sjekke at (jf. invertibelmatriseteoremet)

- $\det(D) = 0$;
- $D$ er ikke radekvivalent med $I_4$;
- Det fins $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ slik at likningssystemet $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er uten løsning;
- Likningssystemet $D\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger;
- Mengden $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4\}$ er lineært avhengig;
- Vektorene $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ og $\mathbf{d}_4$ utspenner ikke $\mathbb{R}^4$.

■

## 3.4 Egenrom

For hver egenverdi $\lambda$ til en matrise $A$ finner vi altså de tilhørende egenvektorene ved å finne de ikke-trivielle løsningene til likningssystemet

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{3.5}$$

Siden dette systemet er homogent, vil alle løsningene (inkludert $\mathbf{0}$) utgjøre *nullrommet* til matrisen $A - \lambda I$, $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$, og dermed gi et underrom av $\mathbb{R}^n$, så lenge $\lambda$ er reell. Vi definerer:

**Definisjon 3.30** *La $A \in M_n(\mathbb{R})$ og anta at $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi til $A$. Mengden av alle løsningene til likningssystemet*

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

*kalles egenrommet til $A$ tilhørende $\lambda$, og skrives $E_\lambda$, dvs.*

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \mathrm{Nul}(A - \lambda I).$$

**Bemerkning 3.31** Nullvektoren er per definisjon ikke en egenvektor, men siden vi ønsker at et egenrom skal være et underrom, må vi ha med $\mathbf{0}$ i et egenrom. ■

Et egenrom vil dermed ha en basis og en dimensjon. Vi husker fra utregningene for nullrom i seksjon 1.8, at når vi finner en basis for nullrommet ved radredusering, vil vektorene vi leser ut av matriseformen til løsningene være lineært uavhengige. Disse utregningene er akkurat de samme som den «nye» metoden (3.4) vi bruker for å finne egenvektorer. Vi har dermed følgende:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Når vi bruker metoden (3.4) til å finne egenvektorer}\\ \text{for matrisen } A \text{ tilhørende egenverdien } \lambda\text{, vil vektorene vi}\\ \text{leser ut av matriseformen til løsningene}\\ \text{være lineært uavhengige, og vi finner dermed en basis for } E_\lambda.\end{array}} \tag{3.6}$$

**Eksempel 3.32** Vi vil finne egenrommene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi må først finne egenverdiene. Den karakteristiske likningen er (sjekk!)

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0,$$

som er et polynom av grad 3. Vi må prøve oss litt frem, og finner bl.a. at $\lambda = 1$ er en rot, og vi kan dermed finne de resterende røttene. Egenverdiene til matrisen $A$ er (sjekk!) 1 med multiplisitet 2, og 5 med multiplisitet 1.

Egenrommet $E_1$ finner vi ved å løse likningssystemet $(A - I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, som gir radreduseringen (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siden systemet har to frie variabler, vil $E_1$ være 2-dimensjonalt, og vi finner at (sjekk!)

$$E_1 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De to vektorene som utspenner $E_1$ er lineært uavhengige (per metode, se (3.6)), og vil danne en basis for $E_1$.

Egenrommet $E_5$ er endimensjonalt, og du kan sjekke at

$$E_5 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dette egenrommet er dermed en linje i $\mathbb{R}^3$ gjennom origo, og altså 1-dimensjonalt. Vektorene $\mathbf{x}$ som ligger på denne linja er alle slik at $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$. ■

Vi merker oss at for en egenverdi $\lambda$ kan det vises at

$$\boxed{\dim E_\lambda \leq \text{ multiplisiteten til } \lambda} \tag{3.7}$$

(tenk litt over dette!). I eksempel 3.32 har vi likhet i (3.7), og vi har også sett et eksempel der vi har streng ulikhet i (3.7):

**Eksempel 3.33** I eksempel 3.23 så vi at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(kun) har egenverdien 4 med tilhørende egenvektorer

$$s \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, s \neq 0.$$

Det betyr at

$$E_4 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

så $\dim E_4 = 1$, mens multiplisiteten til egenverdien 4 er 2.

Egenrommet $E_4$ er linja gitt ved $y = \frac{2}{3}x$ (sjekk!), så vektorene $\mathbf{v}$ på denne linja er slik at $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 4\mathbf{v}$. ■

Vi har nå sett på egenverdiene hver for seg. Hva skjer mellom egenvektorer for <u>ulike</u> egenverdier? Vi har følgende resultat:

**Teorem 3.34** *La $A \in M_n(\mathbb{R})$, og la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ være egenvektorer tilhørende <u>forskjellige</u> egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ for $A$. Da er mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ lineært uavhengig.*

Vi tar med beviset for spesielt interesserte. Beviset er med andre ord ikke pensum i MAT1012.

*Bevis:* Vi viser dette ved å anta at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er lineært avhengig, og viser at dette fører til noe usant (vi får en motsigelse). Dermed må det motsatte, nemlig at mengden er lineært uavhengig, være sant:

Anta at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er lineært avhengig. Det betyr at minst en av vektorene i mengden er en lineær kombinasjon av de andre vektorene. Vi *ordner* vektorene slik at $r$ er den minste indeksen slik at $\mathbf{v}_{r+1}$ er en lineær kombinasjon av de *foregående* lineært uavhengige vektorene (overbevis deg selv om at vi kan gjøre dette!). Da fins det skalarer $k_1, k_2, \ldots, k_r$ forskjellige fra 0 slik at

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{r+1}. \tag{3.8}$$

Vi multipliserer likningen med $A$:

$$\begin{aligned} A(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r) &= A\mathbf{v}_{r+1} \\ k_1(A\mathbf{v}_1) + k_2(A\mathbf{v}_2) + \cdots + k_r(A\mathbf{v}_r) &= A\mathbf{v}_{r+1}, \end{aligned}$$

og siden $\mathbf{v}_i$-ene er egenvektorer tilhørende henholdsvis egenverdiene $\lambda_i$, får vi

$$k_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\lambda_r\mathbf{v}_r = \lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}.$$

Vi har nå fått nye skalarer inn i likningen (3.8) som vi startet med, dvs. at vi har likningssystemet

$$\begin{cases} L_1: & k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{r+1} \\ L_2: & k_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\lambda_r\mathbf{v}_r = \lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}. \end{cases}$$

Ved å sette uttrykket for $\mathbf{v}_{r+1}$ i $L_1$ inn i $L_2$ får vi

$$k_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\lambda_r\mathbf{v}_r = \lambda_{r+1}(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r)$$

som gir

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_1 + k_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_r = \mathbf{0}. \tag{3.9}$$

Siden mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ er antatt lineært *u*avhengig, så er skalarene $k_i(\lambda_i - \lambda_{r+1})$ i (3.9) lik 0 for $i = 1, 2, \ldots, r$. Videre, siden egenverdiene er antatt forskjellige, er $(\lambda_i - \lambda_{r+1}) \neq 0$ for $i = 1, 2 \ldots, r$, som betyr at $k_i = 0$ for $i = 1, 2, \ldots, r$.

Ser vi nå på likningen (3.8) som vi startet med, får vi at $\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}$, noe som er umulig! Dermed får vi motsigelsen vi ønsket, så mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er ikke lineært avhengig, dvs. den er lineært uavhengig. $\square$

**Eksempel 3.35** I eksempel 3.32 har matrisen $A$ to egenrom,

$$E_1 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

og

$$E_5 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Teorem 3.34 gir at mengdene

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

og

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

begge er lineært uavhengige, siden hver av mengdene inneholder egenvektorer tilhørende forskjellige egenverdier.

Legg merke til at teoremet ikke sier noe om mengden

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er lineært uavhengig. I neste seksjon vil vi imidlertid gi et resultat som sier at denne mengden er lineært uavhengig. Dette kan vi sjekke, f.eks. ved radreduksjon (gjør det!). $\blacksquare$

## 3.5 Diagonalisering

Vi har sett at diagonale matriser er ekstra enkle å ha med å gjøre. Vi skal nå se hva det vil si å *diagonalisere* en matrise. Dette er en nyttig operasjon som først og fremst holder styr på egenverdier og -vektorer til matrisen, og som har flere anvendelser.

I neste kapittel skal vi få bruk for diagonalisering når vi skal løse systemer av difflikninger, og i dette kapittelet skal vi se et eksempel på hvordan diagonalisering dukker opp f.eks. i kjemi, i såkalt hückelteori. Vi har dessuten allerede brukt diagonalisering i forkledning i MAT1001; i forbindelse med populasjonsdynamikk.

Vi starter med en definisjon:

**Definisjon 3.36** *En kvadratisk matrise $A$ kalles* diagonaliserbar *hvis $A$ kan faktoriseres på formen*

$$A = PDP^{-1}$$

*der $D$ er en diagonal matrise og $P$ er en inverterbar matrise.*

Vi ser umiddelbart at en $n \times n$ diagonal matrise $D$ er diagonaliserbar siden $D = I_n D I_n^{-1}$, dvs. $P$ er identitetsmatrisen (og $I_n^{-1} = I_n$).

**Eksempel 3.37** Matrisen $A$ gitt ved

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

er diagonaliserbar fordi $A$ kan faktoriseres som $A = PDP^{-1}$ der

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(vi skal straks forklare hvordan vi finner disse matrisene). Du kan sjekke at

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

og at

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

■

Å *diagonalisere* matrisen $A$ vil si å finne $P$ (inverterbar matrise) og $D$ (diagonal matrise) slik at $A = PDP^{-1}$. Du trenger ikke nødvendigvis å regne ut $P^{-1}$ - med mindre du trenger den / blir spurt om det.

Det er ikke alle matriser som kan diagonaliseres. Istedenfor å lete etter eksempler på matriser som ikke er diagonaliserbare, stiller vi heller det generelle spørsmålet «Hvilke matriser er diagonaliserbare?»

Vi går nå i gang med å svare på dette spørsmålet: Hvis $A$ er diagonaliserbar, så skal $A$ kunne skrives som $A = PDP^{-1}$ der $P$ er inverterbar og $D$ er en diagonal matrise. La oss anta at det er tilfellet. Hvordan må $P$ og $D$ da se ut?

Ved å multiplisere med $P$ får vi

$$AP = PD.$$

Kall kolonnene til $P$ for $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, og diagonalkomponentene til $D$ for $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Vi har

$$AP = A[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n] = [A\mathbf{u}_1\ A\mathbf{u}_2\ \cdots\ A\mathbf{u}_n]$$

og

$$PD = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{bmatrix} = [\mu_1\mathbf{u}_1\ \mu_2\mathbf{u}_2\ \cdots\ \mu_n\mathbf{u}_n].$$

Siden $AP = PD$, har vi

$$A\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \quad \text{for alle } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.10}$$

Matrisen $P$ er inverterbar per antagelse, så alle kolonnevektorene $\mathbf{u}_i$ er forskjellige fra $\mathbf{0}$. Dermed gir (3.10) at kolonnene til $P$ og diagonalkomponentene til $D$ er henholdsvis egenvektorene og egenverdiene for $A$, der diagonalkomponentene til $D$ korresponderer, henholdsvis, til kolonnene til $P$. Dessuten, invertibelmatriseteoremet gir at kolonnene til $P$ er lineært uavhengige, siden $P$ er inverterbar.

Dette betyr at hvis $A$ er diagonaliserbar med $A = PDP^{-1}$, så består $P$ av $n$ lineært uavhengige egenvektorer for $A$, og $D$ består av de tilhørende egenverdiene.

Vi har dermed vist «bare hvis»-delen av det såkalte *diagonaliseringsteoremet*:

**Teorem 3.38** ***(Diagonaliseringsteoremet)*** *En $n \times n$-matrise $A$ kan diagonaliseres som $A = PDP^{-1}$ hvis og bare hvis kolonnene til $P$ er $n$ lineært uavhengige egenvektorer for $A$.*
*I så tilfelle er diagonalkomponentene til $D$ egenverdiene til $A$ som korresponderer, henholdsvis, til kolonnene til $P$.*

Beviset for «hvis»-delen består i å følge argumentene vi utførte for å vise «bare hvis»-delen, bare baklengs. Det er en fin oppgave å gjøre det!

For å diagonalisere en $n \times n$-matrise trenger vi altså $n$ lineært uavhengige egenvektorer.

**Eksempel 3.39** I Eksemplene 3.32, 3.35 og 3.37 har vi møtt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Siden $A$ er $3\times3$, og vi i eksempel 3.35 fant tre lineært uavhengige egenvektorer for $A$, er $A$ diagonaliserbar ved diagonaliseringsteoremet 3.38.

Det samme teoremet forklarer også hvor matrisene $P$ og $D$ i diagonaliseringen av $A$ i eksempel 3.37 kommer fra, siden de består henholdsvis av lineært uavhengige egenvektorer og tilhørende egenverdier (sjekk!):

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Når vi har bestemt rekkefølgen på kolonnene i $P$, er rekkefølgen på diagonalkomponentene til $D$ også bestemt, siden disse må korrespondere.

Vi kan bytte rekkefølge på kolonnene til $P$, men $D$ må endres tilsvarende. Vi ser da at i (3.11) kan de to første kolonnene i $P$ byttes uten at $D$ forandres (men $P^{-1}$ vil forandres). Vi kan også for eksempel ha

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Diagonaliseringsteoremet gir følgende **metode for (om mulig) å dia-**

**gonalisere en $n \times n$-matrise $A$:**

1) Finn egenverdiene til $A$.
2) Finn $n$ lineært uavhengige egenvektorer til $A$. Hvis de ikke fins, er $A$ ikke diagonaliserbar. Hvis de fins, gå videre i metoden.
3) Lag matrisen $P$ der vektorene i 2) utgjør kolonnene (rekkefølgen på kolonnene er ikke viktig).
4) Lag den diagonale matrisen $D$ der de tilhørende egenverdiene til vektorene i 3) utgjør diagonalkomponentene (rekkefølgen på komponentene er viktig her! - diagonalkomponentene i $D$ må korrespondere, én og én, med kolonnene i $P$)

- **Merknad:** Det er flere valg for $P$ i punkt 3) siden rekkefølgen på kolonnene ikke er viktig. Dermed kan $A$ diagonaliseres på flere måter.
- **Mulighet for sjekk av riktig utregning:** Sjekk at $P$ er inverterbar, og at $AP = PD$ - da slipper du å invertere $P$. Eventuelt finn $P^{-1}$ og sjekk at $A = PDP^{-1}$.

**Eksempel 3.40** Vi vil diagonalisere matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

1) Vi finner egenverdiene. Den karakteristiske likningen er $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, med løsninger 1 og 2.
2) Vi finner egenrommene. Radreduseringen

$$\begin{bmatrix} -3 & 12 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gir

$$E_1 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

og radreduseringen

$$\begin{bmatrix} -4 & 12 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gir

$$E_2 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ved teorem 3.34 er $\{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ en lineært uavhengig mengde, så $A$ er diagonaliserbar, ved diagonaliseringsteoremet.

3) $P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(sjekk gjerne at $P$ er inverterbar , og at $AP = PD$!). ■

Spørsmålet er nå: «Hvilke $n \times n$-matriser har $n$ lineært uavhengige egenvektorer (og dermed er diagonaliserbare)?»

Ved å sette sammen teorem 3.34 og diagonaliseringsteoremet 3.38, får vi iallfall følgende resultat (sjekk!):

**Teorem 3.41** *En $n \times n$-matrise med $n$ forskjellige egenverdier er diagonaliserbar.*

Når det gjelder $n \times n$-matriser som ikke har $n$ forskjellige egenverdier, har vi i eksempel 3.23 sett at $2 \times 2$-matrisen $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ kun har en egenverdi, og kun én lineært uavhengig egenvektor. Denne matrisen har dermed ikke nok lineært uavhengige egenvektorer til å være diagonaliserbar.

Til gjengjeld så vi i eksempel 3.32 at $3 \times 3$-matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ har to egenverdier, og tre lineært uavhengige egenvektorer siden egenverdien med multiplisitet 2 her gir opphav til to lineært uavhengige egenvektorer. Denne matrisen er som vi vet diagonaliserbar.

Det kan se ut til at dimensjonen til egenrommene og multiplisiteten til egenverdiene kan hjelpe oss å formulere noe om hvilke matriser som har $n$ lineært uavhengige egenvektorer, og dermed er diagonaliserbare. Og riktignok, følgende resultat kan vises:

**Teorem 3.42** *La $A$ være en $n \times n$-matrise med $p$ forskjellige egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Matrisen $A$ er diagonaliserbar hvis og bare hvis summen av dimensjonene til de ulike egenrommene er $n$.*
*Dette skjer hvis og bare hvis dimensjonen til egenrommet tilhørende $\lambda_k$ er lik multiplisiteten til $\lambda_k$ for hver $k = 1, 2, \ldots, p$.*

Selve beviset bygger på følgende resultat (et resultat vi annonserte i eksempel 3.35):

**Teorem 3.43** *La $A \in M_n(\mathbb{R})$, og anta at $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ er forskjellige egenverdier til $A$. For hver $k$, la $\mathcal{B}_k$ være en basis for egenrommet $E_{\lambda_k}$. La $\mathcal{B}$ være mengden som består av alle vektorene fra alle $\mathcal{B}_k$-ene. Da er $\mathcal{B}$ lineært uavhengig.*

## 3.6 Anvendelse: Hückelteori

Vi så i MAT1001 hvordan matriser kan brukes til å holde styr på mye informasjon (binære matriser og søkemotorer på nettet).

Neste eksempel er hentet fra såkalt hückelteori innen kjemi. Denne teorien er kort fortalt en enkel modell for å beregne molekylorbitaler for en del hydrokarboner. Vi skal ikke gå inn på denne teorien her, men heller observere at diagonalisering av matriser spiller en sentral rolle:

For en del hydrokarboner kan man sette opp den såkalte hückelmatrisen, som koder hvordan atomene i molekylet sitter sammen (matrisen holder styr på informasjon). Når hückelmatrisen er diagonalisert kan man bruke dette til å studere egenskaper til molekylet.

Vi tar et eksempel på en hückelmatrise:

**Eksempel 3.44** Vi vil diagonalisere hückelmatrisen til stoffet butadien, som er gitt ved

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likningen er (sjekk!)

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1 = 0.$$

Ved å substituerer $u = \lambda^2$ får vi $u^2 - 3u + 1 = 0$, som har løsninger (sjekk!) $u = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Det gir $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$. Vi kan imidlertid gjøre dette svaret penere, ved følgende algebraiske manipulasjoner:

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{5} + 5}{4} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Dermed får vi de fire egenverdiene

$$\lambda = \pm\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Siden $H$ er en $4 \times 4$-matrise med 4 forskjellige egenverdier, er $H$ diagonaliserbar ved teorem 3.41. Videre, siden basiselementene for de ulike egenrommene danner en basis for $\mathbb{R}^4$ ved teorem 3.34, vil hvert av egenrommene ha dimensjon 1.

Vi finner egenrommene ved radredusering som vanlig. Eventuelt kan man ty til maskin, men det er fin regnetrening å sjekke at (gjør det!)

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dvs. at

$$E_{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Helt tilsvarende utregninger, med $-$ for $+$ foran $\sqrt{5}$, gir

$$E_{-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi legger merke til at $E_{-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})}$ også kan uttrykkes ved hjelp av tallet $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ siden (sjekk!)

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

På tilsvarende måte får vi at de to andre egenrommene $E_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ og $E_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ er gitt ved

$$E_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

og

$$E_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 \\ -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi kan dermed diagonalisere $H$ (hückelmatrisen til butadien) for eksempel ved å bruke

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \end{bmatrix}$$

og

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) & -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 & -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 & 1 & -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ved teorem 3.43 (eventuelt teorem 3.34), utgjør de fire kolonnene til $P$ en basis for $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer.

Matrisene $D$ og $P$ gir nyttig informasjon om butadien-molekylet (men det går vi ikke inn på her). ■

## 3.7 Symmetriske matriser

Vi avsluttter dette kapittelet med å se litt nærmere på såkalte symmetriske matriser. Det viser seg at slike matriser har noen ekstra pene egenskaper.

Vi vil bl.a. bruke matrisene $H$, $P$ og $D$ i eksempel 3.44 i forrige seksjon, der matrisen $H$ er et eksempel på en symmetrisk matrise. Vi har:

**Definisjon 3.45** *En matrise $A$ kalles symmetrisk dersom $A^T = A$.*

Siden matrisen $A^T$ ($A$ transponert) har radene til $A$ som kolonner og kolonnene til $A$ som rader, må symmetriske matriser være kvadratiske.

Hvis $A$ er en symmetrisk $n \times n$-matrise og vi skriver $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i \leq n$, ha vi at $a_{ij} = a_{ji}$, dvs. at komponenetene på diagonalen kan være hva som helst og at de andre komponentene er symmetriske om diagonalen. F.eks. er matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

symmetrisk.

Vi har følgende resultat for symmetriske matriser:

**Teorem 3.46** *Hvis $A$ er en symmetrisk matrise, er to egenvektorer tilhørende ulike egenverdier ortogonale.*

*Bevis:* La $\lambda_1$ og $\lambda_2$ være to egenverdier for $A$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, og la $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ være egenvektorer tilhørende henholdsvis $\lambda_1$ og $\lambda_2$. Vi må vise at $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ er ortogonale, dvs. $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = 0$.

Vi har (sjekk hver likhet! - se seksjon 2.5 for regneregler):

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= \lambda_1(\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2) = (\lambda_1\mathbf{v}_1^T)\mathbf{v}_2 \\
&= (\lambda_1\mathbf{v}_1)^T\mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T\mathbf{v}_2 \\
&= (\mathbf{v}_1^T A^T)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T(A\mathbf{v}_2) \\
&= \mathbf{v}_1^T(\lambda_2\mathbf{v}_2) = \lambda_2(\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2) \\
&= \lambda_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2).
\end{aligned}$$

Dermed får vi at $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, og siden $\lambda_1 \neq \lambda_2$, er $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. $\square$

**Eksempel 3.47** I eksempel 3.44 består kolonnene til matrisen $P$ av egenvektorer tilhørende hver av de fire egenverdiene til matrisen $H$. Siden $H$ er symmetrisk, vil hvert par av disse vektorene være ortogonale ved teorem 3.46. For eksempel hvar vi

$$\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1, -1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

(sjekk alle parene!). $\blacksquare$

Symmetriske matriser tillater en spesiell form for diagonalisering. Vi har følgende definisjon:

**Definisjon 3.48** *En kvadratisk matrise $A$ kalles* ortogonalt diagonaliserbar *hvis $A$ kan faktoriseres på formen*

$$A = PDP^{-1}$$

*der $D$ er en diagonal matrise og $P$ er en ortogonal matrise, dvs. $P^{-1} = P^T$ og dermed*

$$A = PDP^{-1} = PDP^T.$$

Hvis $A$ er ortogonalt diagonaliserbar har vi

$$A^T = (PDP^T)^T = P^{TT}D^TP^T = PDP^T = A,$$

dvs. $A$ er symmetrisk. Det viser seg videre at vi har:

**Teorem 3.49** *En kvadratisk matrise $A$ er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis $A$ er en symmetrisk matrise.*

Ovenfor har vi vist den ene implikasjonen - den andre viser vi ikke her (men tenk gjerne på hva vi trenger å vise).

**Eksempel 3.50** I eksempel 3.44 er $H$ en symmetrisk matrise, og kan dermed ortogonalt diagonaliseres ved teorem 3.49. La $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Da har vi at $\sqrt{2+2a^2}P$ er en ortogonal matrise siden

$$\left(\sqrt{2+2a^2}\begin{bmatrix} 1 & a & -a & -1 \\ a & -1 & -1 & a \\ a & -1 & 1 & -a \\ 1 & a & a & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\sqrt{2+2a^2}\begin{bmatrix} 1 & a & a & 1 \\ a & -1 & -1 & a \\ -a & -1 & 1 & a \\ -1 & a & a & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dermed kan $H$ ortogonalt diagonaliseres ved hjelp av $D$ og matrisen$\sqrt{2+2a^2}P$.
■

## 3.8 Nå skal du kunne

- definisjonen av komplekst $n$-tuppel, $\mathbb{C}^n$, kompleks vektor, konjugert vektor, konjugert matrise, reelt polynom, komplekst polynom, algebraisk $n$-te grads likning, multiplisitet til en rot, egenrom, diagonaliserbar matrise, symmetrisk matrise, ortogonalt diagonaliserbar matrise
- finne egenverdiene til en diagonal matrise
- forklare hva det betyr at 0 er en egenverdi til en matrise
- vite hvordan vi finner egenrommene til en matrise, og regne ut disse for hånd for «små» matriser
- vite hva det vil si å diagonalisere en matrise, og vite at dette gir nyttig informasjon, som bl.a. anvendes innenfor kjemi (f.eks. hückelteori)
- løse oppgaver (for hånd for «små» matriser) av typen «Er $A$ diagonaliserbar? Begrunn. Hvis ja, finn en diagonalisering av $A$.»
- gjøre rede for algebraens fundamentalteorem og diagonaliseringsteoremet

## 3.9 Oppgaver, kapittel 3

**Oppgave 64** Regn ut $s\mathbf{w} + t\mathbf{z}$ når $s = i, t = 1 + 2i, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -4i \\ 2-i \end{bmatrix}$ og $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2+i \\ 2i \end{bmatrix}$.

**Oppgave 65** Finn $\overline{A\mathbf{z}}$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2-i & 0 & 1 \\ 4 & -1 & i \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$

**Oppgave 66** La $A \in M_n(\mathbb{R})$ og la $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Vis at

$$\operatorname{Re}(A\mathbf{z}) = A\operatorname{Re}(\mathbf{z}) \quad \text{og} \quad \operatorname{Im}(A\mathbf{z}) = A(\operatorname{Im}\mathbf{z}).$$

**Oppgave 67** Faktoriser $z^6 - 9z^2$

a) i reelle polynomer;

b) i komplekse polynomer.

**Oppgave 68** a) Regn ut $(z - 3 + i)(z - 3 - i)$

b) Vis at $(z - w)(z - \overline{w})$ er et reelt polynom for $w \in \mathbb{C}$.

**Oppgave 69** Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

**Oppgave 70** Finn egenverdier og egenvektorene til matrisen:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (*Hint*: Du må prøve deg frem for å finne en rot i det karakteristiske polynomet.)

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**Oppgave 71** Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen $A$ og skriv vektoren $\mathbf{x}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

**Oppgave 72** Vis at egenverdiene til en øvre triangulær matrise er komponentene på hoveddiagonalen.

**Oppgave 73** La $A$ være en $n \times n$-matrise og anta at $A$ har $n$ reelle egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (repetert etter multiplisitet). Forklar hvorfor $\det(A)$ er produktet av de $n$ egenverdiene til $A$.

**Oppgave 74** Vi minner om at $A^T$ («$A$ transponert») er matrisen der radene i $A$ utgjør kolonnene, og kolonnene i $A$ utgjør radene. Vis at $A$ og $A^T$ har de samme egenverdiene. Har de også de samme egenvektorene?

**Oppgave 75** To $n \times n$-matriser $A$ og $B$ kalles *similære* dersom det finnes en inverterbar matrise $P$ slik at $B = P^{-1}AP$. Vis at $A$ og $B$ da har de samme egenverdiene. Finn egenvektorene til $B$ uttrykt ved hjelp av $P$ og egenvektorene til $A$.

**Oppgave 76** Anta at $A$ er en inverterbar matrise og at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $A$ med egenverdi $\lambda \neq 0$. Vis at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $A^{-1}$ med egenverdi $\lambda^{-1}$.

**Oppgave 77** Vis at dersom alle kolonnene i en matrise har samme sum, så er dette tallet en egenverdi for matrisen (*Hint*: Gjør noen radoperasjoner før du regner ut determinanten til $\lambda I_n - A$). Bruk dette til å finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 78** Vis at egenverdien(e) til en $2 \times 2$-matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

Bruk denne formelen til å forklare at egenverdiene til en symmetrisk (reell) $2 \times 2$-matrise (dvs. $b = c$) alltid er reelle.

**Oppgave 79** For hver av matrisene i oppgave 69 a)-d):

i) Finn multiplisiteten til hver egenverdi $\lambda$.

ii) Finn egenrommet $E_\lambda$ og $\dim E_\lambda$ for hver egenverdi $\lambda$.

iii) Gi en geometrisk tolkning av egenrommene.

iv) Fins det en basis for $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer til matrisen? Begrunn.

**Oppgave 80** Diagonaliser $A$, dvs. finn en inverterbar matrise $P$ og en diagonal matrise $D$ slik at $A = PDP^{-1}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

**Oppgave 81** For hver av de tre matrisene i oppgave 71: Diagonaliser matrisen $A$, dvs. finn en inverterbar matrise $P$ og en diagonal matrise $D$ slik at $A = PDP^{-1}$.

**Oppgave 82** La $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Finn en diagonal matrise $D$ og en inverterbar matrise $P$ slik at $A = PDP^{-1}$.

**Oppgave 83** Finn en diagonal matrise $D$ og en inverterbar matrise $P$ slik at $A = PDP^{-1}$. Finn også $P^{-1}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**Oppgave 84** For hver matrise $A$ nedenfor er egenverdiene til $A$ oppgitt. Er $A$ diagonaliserbar? Begrunn. Hvis ja, diagonaliser $A$.

a) $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 7 \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}$ $(\lambda = \frac{1}{3}, -1)$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $(\lambda = 4)$

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $(\lambda = 1, 2, 3)$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $(\lambda = 4, 5)$

e) $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ $(\lambda = 1, 3)$

**Oppgave 85** La $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, og la $A$ være matrisen gitt ved

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til $A$.

b) Finn en inverterbar matrise $P$, dens inverse matrise $P^{-1}$ og en diagonal matrise slik at $A = PDP^{-1}$. (*Hint:* $P$ og $D$ er komplekse matriser, og kan komponeres av egenvektorer og egenverdier, som i det reelle tilfellet. Vi kan også invertere komplekse matriser på samme måte som reelle matriser, der vi bruker at $i^2 = -1$.)

**Oppgave 86** La $A \in M_2(\mathbb{R})$ med en kompleks egenverdi $\lambda = a - ib$ ($b \neq 0$) og tilhørende egenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$.

a) Vis at $A(\operatorname{Re}\mathbf{v}) = a\operatorname{Re}\mathbf{v} + b\operatorname{Im}\mathbf{v}$ og $A(\operatorname{Im}\mathbf{v}) = -b\operatorname{Re}\mathbf{v} + a\operatorname{Im}\mathbf{v}$. (*Hint:* Skriv $\mathbf{v} = \operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v}$ og regn ut $A\mathbf{v}$.)

b) Vis at $AP = PC$ der

$$P = [\operatorname{Re}\mathbf{v}\ \ \operatorname{Im}\mathbf{v}] \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

## 3.10 Fasit, kapittel 3

**Oppgave 64** $\begin{bmatrix} 4+5i \\ -3+4i \end{bmatrix}$

**Oppgave 65** a) $\begin{bmatrix} 4-i \\ 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2i+2 \\ -6i \end{bmatrix}$

**Oppgave 66** ikke fasit

**Oppgave 67**

a) $z^2(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})(z^2+3)$

b) $z^2(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})(z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})$

**Oppgave 68**

a) $z^2-6z+10$

b) $w = a+ib$ gir $(z-w)(z-\overline{w}) = z^2-2az+a^2+b^2 \; (a, b \in \mathbb{R})$

**Oppgave 69**

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\lambda_1 = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

e) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

f) $\lambda_1 = 4 + i, \lambda_2 = 4 - i, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 + i \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 - i \end{bmatrix}$

**Oppgave 70**

a) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{5}, \lambda_3 = -\sqrt{5}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \sqrt{5} - 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 =$
$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \sqrt{5} + 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

**Oppgave 71**

a) Egenverdier $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$, egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, lineær kombinasjon $\mathbf{x} = \frac{3}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{11}{5}\mathbf{v}_2$

b) Egenverdier $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$, egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, lineær kombinasjon $\mathbf{x} = -4\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$

c) Egenverdier $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$, egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$, lineær kombinasjon $\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$

**Oppgave 72** ikke fasit

**Oppgave 73** Sett $\lambda = 0$. (Sjekk også resultatet på noen matriser du kjenner!)

**Oppgave 74** Egenvektorene er vanligvis ikke de samme. Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er f.eks. en egenvektor for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, men ikke for $A^T$.

**Oppgave 75** Egenvektorene til $B$ er på formen $\mathbf{v} = P^{-1}\mathbf{u}$ der $\mathbf{u}$ er en egenvektor for $A$.

**Oppgave 76** ikke fasit

**Oppgave 77** $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

**Oppgave 78** ikke fasit

**Oppgave 79**

a) i) Egenverdiene 1 og 3 har begge multiplisitet 1.

ii) $E_1 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, E_3 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \dim E_1 = 1, \dim E_3 = 1.$

iii) Hvert av egenrommene er en linje i $\mathbb{R}^2$ gjennom origo utspent av $(-1, 1)$ (for $E_1$) og $(1, 1)$ (for $E_3$).

iv Ja, siden matrisen er $2 \times 2$ og har to forskjellige egenverdier, er basisvektorene for $E_1$ og $E_3$ lineært uavhengige. Vi har dermed to lineært uavhengige egenvektorer i $\mathbb{R}^2$, som dermed gir en basis for $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer.

b) og c) Tilsvarende svar som i a), bare bytt ut egenverdier og egenvektorer fra fasiten i oppgave 69.

d) i) Egenverdien 2 har multiplisitet 2.

ii) $E_2 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \dim E_2 = 1.$

iii) $E_2$ er en linje i $\mathbb{R}^2$ gjennom origo utspent av $(-1, 1)$.

iv) Nei, matrisen har kun én lineært uavhengig egenvektor som ikke er nok til å utspenne $\mathbb{R}^2$.

**Oppgave 80**

a) $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

## Oppgave 81

a) $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix})$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix})$

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix})$

**Oppgave 82** $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix})$

## Oppgave 83

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

## Oppgave 84

a) Ja, er $2 \times 2$ og har 2 forskjellige egenverdier.
$P = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) Nei, er $2 \times 2$ og har ikke 2 lineært uavhengige egenvektorer.

c) Ja, er $3 \times 3$ og har 3 forskjellige egenverdier.
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Nei, er $3 \times 3$ og har ikke 3 lineært uavhengige egenvektorer..

e) Ja, er $3 \times 3$ og har 3 lineært uavhengige egenvektorer ($\dim E_3 = 2$).
$$P = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 85**

a) Egenverdier $a \pm ib$. Egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{bmatrix}$

**Oppgave 86** ikke fasit

# Kapittel 4

# Systemer av første ordens lineære differensiallikninger

Differensiallikninger, forkortet «difflikninger», er svært viktige, og dukker opp nærmest overalt i anvendelser. En difflikning er en likning der en funksjon og dens deriverte funksjoner inngår. Ofte har vi en kobling/sammenheng mellom flere funksjoner og deres deriverte funksjoner. Da får vi et *system* av difflikninger, som betyr at *alle* likningene skal være oppfylt *samtidig*.

La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være deriverbare (reelle) funksjoner i variabelen $t$. Som i MAT1001, vil vi bruke forkortelsene $x_i$ og $x_i'$ for henholdsvis $x_i(t)$ og $x_i'(t)$. Husk også notasjonen $x_i' = \frac{dx_i}{dt}$.

I dette kapittelet skal vi først og fremst se på systemer av difflikninger på formen

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{4.1}$$

der $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Dette kalles et *homogent system av $n$ første ordens lineære difflikninger med konstante koeffisienter* (homogent siden vi ikke har konstantledd, første ordens siden den første deriverte er den høyeste deriverte som forekommer i alle likninger, konstante koeffisienter siden hver $a_{ij}$ er en reell konstant, dvs. avhenger ikke av $t$, og lineær skal vi straks forklare litt nærmere).

## 4.1 Vektorvaluerte funksjoner

Løsningene til en difflikning er funksjoner. Løsninger til *systemer* av difflikninger kalles *vektorvaluerte funksjoner*.

**Definisjon 4.1** *En vektorvaluert funksjon* $\mathbf{x}$ *er en funksjon som er definert på* $\mathbb{R}$ *og som tar verdier i* $\mathbb{R}^n$ *for en* $n \geq 2$*: Hver* $t \in \mathbb{R}$ *sendes da på en vektor* $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$.
*Funksjonene* $x_i$ *som sender* $t \in \mathbb{R}$ *til* $x_i(t) \in \mathbb{R}$ *kalles komponentfunksjonene til* $\mathbf{x}$.

Vi kan dermed skrive en vektorvaluert funksjon som

$$\mathbf{x}\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

der

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)).$$

Vi deriverer en vektorvaluert funksjon ved å derivere komponentvis, dvs.

$$\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

Dette forutsetter at alle $x_i$-ene er deriverbare funksjoner av $t$.

**Eksempel 4.2** Den vektorvaluerte funksjonen gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = (4e^{2t}, \sin t)$$

sender variabelen $t \in \mathbb{R}$ på vektoren $(4e^{2t}, \sin t) \in \mathbb{R}^2$. Komponentfunksjonene til $\mathbf{x}$ er deriverbare funksjoner, og vi deriverer komponentvis:

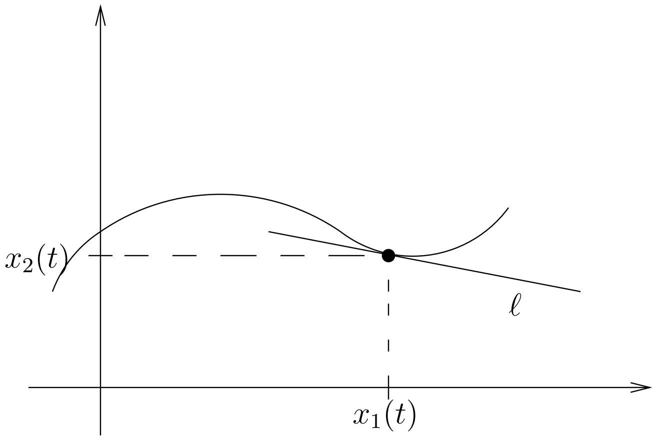
$$\mathbf{x}'(t) = (8e^{2t}, \cos t).$$

■

En vektorvaluert funksjon er deriverbar i et punkt hvis hver av komponentfunksjonene er deriverbare i punktet. De funksjonene vi skal treffe i dette kapittelet vil være deriverbare på hele $\mathbb{R}$.

**Bemerkning 4.3** Dersom $n = 2$ eller 3 kan vi tenke på en vektorvaluert funksjon $\mathbf{x}$ som en parametrisert kurve. Vektoren $\mathbf{x}'(t)$ angir da en retningsvektor for tangenten til kurven i $\mathbf{x}(t)$ (dersom $\mathbf{x}'(t) \neq 0$).

Illustrasjon for $n = 2$:




Linja $\ell$ er tangenten til kurven i punktet $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$. En retningsvektor til linja er gitt ved $\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t))$. ■

**Definisjon 4.4** *En løsning av et system på formen (4.1) er en deriverbar vektorvaluert funksjon $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, som er slik at de deriverte komponentfunksjonene $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ tilfredsstiller alle likningene i systemet.*

**Bemerkning 4.5** Når vi finner løsningene $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ får vi et uttrykk for funksjonene $x_i$, og vi vil angi løsningene på matriseform som

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix},$$

eventuelt på vektorform som

$$(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = (\ldots).$$

■

Vi vet at når vi løser difflikninger vil vi få uendelig mange løsninger (pga. integrasjonskonstanter). Den generelle løsningen til et system av difflikninger vil også gi uendelig mange vektorvaluerte funksjoner. Hvordan skal vi presentere disse? Med basistankegangen for vektorer i bakhodet konstaterer vi følgende:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Det kan vises at \underline{alle} slike systemer (4.1) kan løses,}\\ \text{og at det til ethvert slikt system fins } n \text{ såkalte \textit{basisfunksjoner},}\\ \text{dvs. at alle løsninger til systemet kan skrives som}\\ \text{en unik lineær kombinasjon av disse vektorvaluerte funksjonene.}\\ \text{(Vi sier at «løsningsrommet har dimensjon } n\text{».)}\end{array}} \tag{4.2}$$

Dette er vårt utgangspunkt, og her ligger for øvrig grunnen til at systemene på formen (4.1) kalles lineære.

Vi skal avslutte kapittelet med noen problemer der slike systemer dukker opp, men først skal vi se hvordan en del av disse systemene ofte kan løses. Da vil vi igjen trenge matriser.

Ved å skrive

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kan systemet (4.1) skrives på matriseform som

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

der $A$ kalles *koeffisientmatrisen* til systemet.

Koeffisientmatrisen til et system av $n$ difflikninger vil være en $n \times n$-matrise (hvorfor?), dvs. en kvadratisk matrise, og vi kan dermed bruke det vi har lært om slike matriser i jakten på løsningene til systemer på formen (4.1).

**Eksempel 4.6** Anta at $n = 2$ eller 3. Systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ kan da gis følgende tolkning:

Vi betrakter vektorfeltet $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gitt ved

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Systemet kan derved skrives som $\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}(t))$.

Tenker vi på en løsning som en parametrisert kurve, vil løsningene til systemet være såkalte *integralkurver for vektorfeltet* $F$; i hvert punkt $\mathbf{x}(t)$ på kurven vil tangentvektoren $\mathbf{x}'(t)$ være lik $F(\mathbf{x}(t))$. For illustrasjon, se eksempel 4.11.

Det å løse systemet betyr altså at vi finner alle integralkurvene til vektorfeltet $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Slike vektorfelt er veldig spesielle; de er nettopp de som svarer til lineære avbildninger fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^n$. De fleste vektorfeltene er <u>ikke</u> av denne typen, og generelt er det vanskelig å regne ut integralkurvene til et gitt vektorfelt. Men for de som er lineære lar det seg gjøre ved hjelp av lineær algebra. I dette kapittelet skal vi se hvordan vi kan gå frem når $A$ er diagonaliserbar. ■

## 4.2 Frakobling

Vi starter med et eksempel:

**Eksempel 4.7** Vi vil løse systemet

$$\begin{cases} x_1' = 0 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$$

Hvilke funksjoner $x_1$ og $x_2$ passer inn i begge disse likningene?

Vi ser at $x_1'$ ikke avhenger av $x_2$, og $x_2'$ ikke avhenger av $x_1$. Vi løser dermed systemet ved å løse likningene hver for seg.

For eksempel vil $x_1(t) = 3$ og $x_2(t) = e^{2t}$ løse systemet (sjekk!). Det vil også $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3e^{2t} \end{bmatrix}$.

Som vi vet fra MAT1001 får vi uendelig mange løsninger for hver av disse likningene: Alle løsningene til den første likningen er gitt ved

$$x_1(t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

mens alle løsningene til den andre likningen er gitt ved

$$x_2(t) = C_2\, e^{2t}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Siden likningene er uavhengige av hverandre vil dermed alle løsningene til systemet kunne skrives på formen

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2\, e^{2t} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\, e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dette er dermed den generelle løsningen til systemet.

Vi kan altså skrive enhver løsning av systemet som en lineær kombinasjon av de vektorvaluerte funksjonene $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}_2(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. ■

Det kan være verdt å merke seg hva vi mener med lineært uavhengige vektorvaluerte funksjoner. Det kan vises at (og du kan gjerne bruke dette som en definisjon):

**Teorem 4.8** *La $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ være $p$ vektorvaluerte funksjoner som er løsninger av systemet (4.1). Disse løsningene er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\mathbf{x}_1(t_0), \mathbf{x}_2(t_0), \ldots, \mathbf{x}_p(t_0)$ er lineært uavhengige som vektorer i $\mathbb{R}^n$ for en eller annen $t_0 \in \mathbb{R}$.*

**Eksempel 4.9** I eksempelet ovenfor fant vi at enhver løsning av systemet kan skrives som en lineær kombinasjon av de vektorvaluerte funksjonene $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}_2(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Siden $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{e}_1$ og $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{e}_2$, som er lineært uavhengige som vektorer i $\mathbb{R}^2$ (standardbasisvektorene), er løsningene $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ lineært uavhengige, ved teorem 4.8 med $t_0 = 0$. Vi har dermed funnet to vektorvaluerte funksjoner som er lineært uavhengige og som spenner ut alle løsningene. Dette er dermed to basisfunksjoner for systemet som består av to likninger (noe som er i tråd med (4.2)). ■

Systemet vi nettopp har løst i eksempel 4.7 er et såkalt *frakoblet* system:

**Definisjon 4.10** *Et system av difflikninger på formen (4.1) kalles* frakoblet *hvis hver av de deriverte funksjonene kun avhenger av funksjonen selv, og ikke av en kobling av flere av funksjonene.*

Det betyr at et system av typen (4.1) er frakoblet hvis det er på formen

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \\ \quad\vdots \\ x_n' = \lambda_n x_n \end{cases} \tag{4.3}$$

der $\lambda_i \in \mathbb{R}$ for $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vi kjenner igjen løsningene på hver av likningene i systemet (4.3) fra MAT1001: Vi vet at alle funksjonene $x_i$ som oppfyller difflikningen

$$x_i' = \lambda_i x_i$$

er eksponentialfunksjonene gitt ved

$$x_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}, \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

Siden likningene ikke avhenger av hverandre, er den generelle løsningen til systemet (4.3) gitt ved

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\, e^{\lambda_1 t} \\ C_2\, e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n\, e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = C_1\, e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\, e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + C_n\, e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

der $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$.

Løsningene til et frakoblet system (4.3) kan dermed skrives som

$$C_1\, e^{\lambda_1 t}\, \mathbf{e}_1 + C_2\, e^{\lambda_2 t}\, \mathbf{e}_2 + \cdots + C_n\, e^{\lambda_n t}\, \mathbf{e}_n$$

der $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$.

Spesielt er $\mathbf{x}_1 = e^{\lambda_1 t}\, \mathbf{e}_1, \mathbf{x}_2 = e^{\lambda_2 t}\, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{x}_n = e^{\lambda_n t}\, \mathbf{e}_n$ løsninger. Siden $\{\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \ldots, \mathbf{x}_n(0)\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ er en lineært uavhengig mengde, er $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineært uavhengige løsninger ved teorem 4.8, og siden de spenner ut alle løsningene, er de $n$ basisfunksjoner til systemet (4.3).

Med utgangspunkt i (4.2) ser vi altså at for å finne alle løsninger til (4.1) vil vi trenge $n$ lineært uavhengige løsninger, og vi vil få den generelle løsningen ved å ta lineære kombinasjoner av disse. Til å finne lineært uavhengige løsninger vil vi få bruk for matriseteorien vi har lært:

Det frakoblede systemet i eksempel 4.7 kan skrives på matriseform som

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

og vi ser at koeffisientmatrisen er diagonal. Dette gjelder generelt:

Koeffisientmatrisen til et frakoblet system (4.3) er

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

dvs. en diagonal matrise. Slike systemer er som vi nettopp har sett greie å løse.

Dermed er vi klare for å løse systemer der koeffisientmatrisen «kan gjøres diagonal», dvs. diagonaliseres!

Vi tar først et eksempel:

**Eksempel 4.11** Vi vil løse systemet

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Hvilke funksjoner $x_1$ og $x_2$ passer inn i begge disse likningene?

Vi finner først koeffisientmatrisen $A$, og dens egenverdier:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

har egenverdier (sjekk!) 1 og $-3$, og dermed er $A$ diagonaliserbar. Du kan sjekke at

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

diagonaliserer $A$. Grunnen til at vi diagonaliserer $A$ er at vi nå kan skrive systemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

som

$$\mathbf{x}' = (PDP^{-1})\mathbf{x}.$$

Som så ofte før: Vi må gjøre noe med likningen slik at den blir enklere, og helst mulig å løse! I dette tilfellet er trikset **å multipliserer med** $P^{-1}$ (vi kommer ikke til å trenge å regne ut $P^{-1}$, vi bare bruker den til å manipulere likningen). Det gir

$$P^{-1}\mathbf{x}' = P^{-1}(PDP^{-1}\mathbf{x}) = DP^{-1}\mathbf{x}.$$

Siden $P^{-1}$ kun består av skalarer, har vi at $P^{-1}\mathbf{x}' = (P^{-1}\mathbf{x})'$. Det betyr at vi har systemet

$$(P^{-1}\mathbf{x})' = D(P^{-1}\mathbf{x}).$$

Dermed har vi forenklet systemet: Vi har nå et *frakoblet* system med hensyn på $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$, som vi kan løse ved hjelp av (4.4). Vi setter inn for $D$:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}.$$

Den generelle løsningen til dette systemet er gitt ved

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} C_1\, e^{t} \\ C_2\, e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

dvs. at

$$P^{-1}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1\, e^t \\ C_2\, e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ved **å multiplisere med** $P$ får vi dermed den generelle løsningen til systemet vi ville løse:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= P \begin{bmatrix} C_1\, e^t \\ C_2\, e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1\, e^t \\ C_2\, e^{-3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1\, e^t + C_2\, e^{-3t} \\ C_1\, e^t - C_2\, e^{-3t} \end{bmatrix} = C_1\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\, e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

der $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Du kan sjekke at disse funksjonene passer inn i likningssystemet (sett også inn noen valg for $C_1$ og $C_2$).

Som vi så i eksempel 4.6, kan dette systemet tolkes som et vektorfelt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der

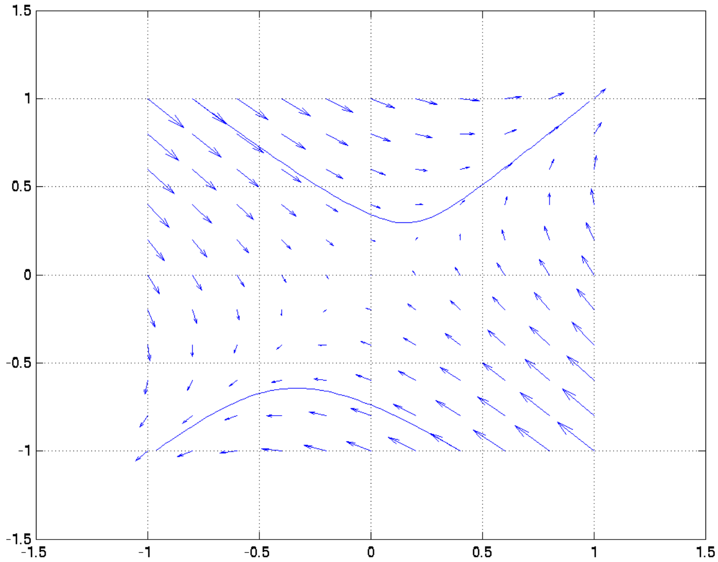
$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

I dette eksempelet har vi altså at

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Løsningene vi har funnet kan vi tenke på som parametriserte kurver (parametrisert ved $t$), kalt integralkurvene for vektorfeltet.

Nedenfor har vi tegnet vektorfeltet vi får fra likningssystemet for $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, og et par av integralkurvene for vektorfeltet (den øverste kurven er integralkurven som går gjennom punktet $(-0{,}8, 1)$, og den nederste kurven er integralkurven gjennom punktet $(0{,}4, -1)$):




$\blacksquare$

I eksempelet ovenfor løste vi systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ved å bruke en diagonalisering til $A$. Denne løsningsmetoden kalles *frakobling* (ved å multiplisere med $P^{-1}$ fikk vi et frakoblet system), og ved å følge denne metoden får vi følgende resultat:

**Teorem 4.12** ***(Frakoblingsteoremet)*** *La $A$ være koeffisientmatrisen til et system på formen (4.1) der $A$ er diagonaliserbar, og anta at matrisene $P$ (inverterbar) og $D$ (diaognal) diagonaliserer $A$. Da er den generelle løsningen til systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ gitt ved*

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$$

*der $\mathbf{y}$ er løsningene til det frakoblede systemet*

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y}.$$

**Bemerkning 4.13** I frakoblingsteoremet antar vi altså at $A$ er diagonaliserbar, dvs. at $A$ har $n$ lineært uavhengige egenvektorer ved diagonaliseringsteoremet.

Det fins også løsningsmetoder for systemet (4.1) når $A$ ikke er diagonaliserbar. Siden $A$ ikke har nok egenvektorer i dette tilfellet, går metoden ut på å finne andre vektorer i tillegg, slik at vi får $n$ lineært uavhengige vektorer. Vi nevner at i dette tilfellet vil løsningene også omfatte polynomfunksjoner multiplisert med eksponentialfunksjoner, dvs. ledd av typen $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}, \ldots$ (jf. løsningsformelen for andre ordens difflikninger der den karakteristiske likningen har én reell rot, som vi lærte i MAT1001).

Vi skal imidlertid **konsentrere oss om systemer der koeffisientmatrisen har $n$ lineært uavhengige egenvektorer**. ■

Vi oppsummerer **frakoblingsmetoden**:

> Vi vil løse (4.1) der koeffsientmatrisen $A$ er diagonaliserbar.
>
> 1) Vi diagonaliserer $A$, dvs. finner $P$ og $D$ ved hjelp av Diagonaliseringsteoremet.
> 2) Vi løser det frakoblede systemet $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$.
> 3) Vi finner løsningene til systemet ved å regne ut $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$.

Vi tar et eksempel med et system av 3 difflikninger:

**Eksempel 4.14** Vi vil løse likningssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_3' = x_3. \end{cases}$$

Vi sjekker først hvor mange egenverdier koeffisientmatrisen har. Koeffisientmatrisen er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I oppgave 70a) fant vi egenverdiene og egenvektorene til nettopp denne matrisen. Matrisen $A$ har 3 forskjellige egenverdier, og en diagonalisering av $A$ er gitt ved (fra oppgave 70a)):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ved frakoblingsmetoden kan vi dermed løse systemet av difflikninger ved først å løse $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$. Det gir (sjekk!)

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} C_1\, e^{4t} \\ C_2\, e^{0t} \\ C_3\, e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\, e^{4t} \\ C_2 \\ C_3\, e^{t} \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Til slutt får vi løsningene av $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1\, e^{4t} \\ C_2 \\ C_3\, e^{t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1\, e^{4t} - C_2 - 2C_3\, e^{t} \\ 2C_1\, e^{4t} + 2C_2 + 5C_3\, e^{t} \\ C_3\, e^{t} \end{bmatrix} = C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{t} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

der $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Hvis vi for eksempel setter $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = -1$ får vi følgende tuppel av funksjoner:

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (e^{4t} - 2 + 2e^{t}, 2e^{4t} + 4 - 5e^{t}, -e^{t}).$$

Sjekk at dette gir en løsning av systemet.

Vi legger merke til at når en av egenverdiene er 0, får vi konstante funksjoner som løsninger (vi velger da alle $C_i$-ene til å være 0, bortsett fra den som svarer til egenverdien 0): I dette tilfellet gir $C_1 = 0$ og $C_3 = 0$ løsningene $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -C_2 \\ 2C_2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Du kan for eksempel sjekke at den konstante løsningen $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (-2, 4, 0)$ passer inn. ■

I anvendelser har vi ofte behov for å regne med symboler (parametere). Vi skal nå ta et eksempel med parametere, som vi skal møte igjen i en anvendelse i slutten av kapittelet. Det blir fort litt lange utregninger i slike eksempler. Det er samtidig et eksempel der en av egenverdiene har multiplisitet større enn 1.

**Eksempel 4.15** Vi vil løse systemet

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 + kx_2 + kx_3 \\ x_2' = kx_1 - \alpha x_2 + kx_3 \\ x_3' = kx_1 + kx_2 - \alpha x_3, \end{cases} \qquad \alpha, k > 0.$$

Koeffisientmatrisen er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & k & k \\ k & -\alpha & k \\ k & k & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Vi legger merke til at $A$ er symmetrisk.

Vi tar med noen av utregningene for å finne egenverdiene og egenvektorene, siden vi treffer på et triks. Den karakteristiske likningen er (sjekk!)

$$-(\alpha + \lambda)^3 + 2k^3 + 3(\alpha + \lambda)k^2 = 0.$$

For å få litt bedre oversikt over denne likningen innfører vi en ny variabel (et lurt triks), og setter $\boxed{u = \alpha + \lambda}$. Det gir likningen

$$-u^3 + 3uk^2 + 2k^3 = 0,$$

og vi ser at $u = -k$ er en løsning. Dermed kan vi utføre polynomdivisjonen

$$-u^3 + 3uk^2 + 2k^3 : u + k,$$

og får (sjekk!) at

$$-u^3 + 3uk^2 + 2k^3 = (u + k)(-u^2 + ku + 2k^2).$$

Ved å løse andregradslikningen får vi til sammen løsningene (sjekk!) $u = -k$ med multiplisitet 2 og $u = 2k$ med multiplisitet 1.

Matrisen $A$ har dermed egenverdiene $-\alpha - k$ med multiplisitet 2, og $-\alpha + 2k$ med multiplisitet 1.

Vi finner så egenrommene/egenvektorene. For $\lambda = -\alpha - k$ gir radreduseringen

$$\begin{bmatrix} k & k & k & 0 \\ k & k & k & 0 \\ k & k & k & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(siden } k \neq 0\text{)}$$

at egenrommet $E_{-\alpha-k}$ er 2-dimensjonalt:

$$E_{-\alpha-k} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Videre kan du sjekke at

$$E_{-\alpha+2k} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(Sjekk også gjerne at en egenvektor i $E_{-\alpha-k}$ og en egenvektor i $E_{-\alpha+2k}$ er ortogonale.) Vi har dermed funnet tre lineært uavhengige egenvektorer ved teorem 3.43, så $A$ er diagonaliserbar (som vi også vet siden $A$ er symmetrisk). Dermed kan vi bruke frakoblingsteoremet, som gir at

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} C_1\, e^{(-\alpha-k)t} \\ C_2\, e^{(-\alpha-k)t} \\ C_3\, e^{(-\alpha+2k)t} \end{bmatrix},$$

så vi får den generelle løsningen (sjekk!) (her har vi satt eksponentialfunksjonene bak vektorene)

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{(-\alpha-k)t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-\alpha-k)t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-\alpha+2k)t},$$

der $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Sjekk nå følgende: Ved teorem 4.8 (med $t_0 = 0$) er $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{(-\alpha-k)t}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-\alpha-k)t}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-\alpha+2k)t}$ lineært uavhengige løsninger (selv om vi altså har samme eksponent i to av eksponentialfunksjonene!). ■

Vi har nå sett flere eksempler på hvordan typiske løsninger til systemer på formen (4.1) ser ut. Det er på tide med en definisjon og en oppsummering i så måte:

**Definisjon 4.16** *En egenfunksjon til systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ er en vektorvaluert funksjon på formen $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ der $\lambda$ er en egenverdi til koeffisientmatrisen $A$ og $\mathbf{v}$ er en tilhørende egenvektor.*

Vi merker oss at siden det fins uendelig mange egenvektorer tilhørende samme egenverdi, har hver egenverdi også uendelig mange tilhørende egenfunksjoner.

**Eksempel 4.17** Vi har allerede møtt mange egenfunksjoner for diverse matriser. I eksempelet ovenfor er $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{(-\alpha-k)t}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-\alpha-k)t}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-\alpha+2k)t}$ eksempler på egenfunksjoner til matrisen

$$\begin{bmatrix} -\alpha & k & k \\ k & -\alpha & k \\ k & k & -\alpha \end{bmatrix}.$$

■

**Oppsummering:** Når $A$ er diagonaliserbar kan enhver løsning skrives som en lineær kombinasjon av egenfunksjoner, ved frakoblingsteoremet. Spesielt er alle egenfunksjonene til et system løsninger av systemet (ved å sette konstanten foran egenfunksjonen lik 1 og resten lik 0). Når vi bruker $n$ lineært uavhengige egenvektorer, gir teorem 4.8 at de tilhørende egenfunksjonene er $n$ lineært uavhengige løsninger (ved å sette $t_0 = 0$).

Dermed har vi i dette tilfellet nok lineært uavhengige egenfunksjoner til å spenne ut alle løsningene. Enhver løsning kan dermed skrives som en *unik* lineær kombinasjon av egenfunksjoner, som dermed er basisfunksjoner for systemet.

Legg merke til at når vi har snakket om diagonalisering har vi, som vi påpekte i forrige kapittel, ment «diagonalisering over $\mathbb{R}$», dvs. vi har hatt reelle egenverdier å jobbe med. Vi må dermed ta en titt for seg på tilfellet der egenverdiene er komplekse.

Før vi gjør det tar vi med begrepet ***initialbetingelse***, som vi også har møtt i MAT1001:

Vi lærer å løse likninger for å kunne løse problemer. Et problem gir opphav til en likning/et system av likninger av en viss type, og et problem har gjerne én løsning.

Så langt har vi funnet uendelig mange løsninger til en del systemer på formen (4.1). For å plukke ut en spesiell løsning blant alle disse, får vi gjerne oppgitt en initialbetingelse, eller vi kan bestemme oss for en initialbetingelse. En initialbetingelse til et system på formen (4.1) er gitt ved

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{b}, \quad \text{for en } t_0 \in \mathbb{R},$$

dvs. for en verdi av variabelen $t_0$ får vi oppgitt verdien til $\mathbf{x}(t_0)$; en vektor. En slik betingelse sammen med systemet av difflikninger kalles et *initialverdiproblem*.

**Eksempel 4.18** Vi vil løse initialverdiproblemet

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I eksempel 4.14 så vi at alle løsningene til systemet er gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{t} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Når vi setter inn initialbetingelsen får vi et lineært likningssystem (sjekk!):

$$\begin{cases} C_1 - C_2 - 2C_3 = 1 \\ 2C_1 + 2C_2 + 5C_3 = 0 \\ C_3 = 1. \end{cases}$$

Vi observerer nå at koeffisientmatrisen til dette likningssystemet er matrisen $P$ som diagonaliserer $A$ (siden vi har satt inn $t = 0$), dvs. kolonnene er 3 lineært uavhengige egenvektorer. (Hvis vi setter inn en annen verdi for $t$, vil vi få multiplumer av disse kolonnene som kolonner, så fortsatt lineært uavhengige egenvektorer). Dermed vet vi at likningssystemet har nøyaktig én løsning ved Invertiblematriseteoremet, så problemet vil ha nøyaktig én løsning.

Løsningen på det lineære likningssystemet er (sjekk!) $C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = -\frac{11}{4}$ og $C_3 = 1$. Dermed er løsningen på initialverdiproblemet (noen ganger setter vi eksponentialfunksjonen foran vektoren, andre ganger bak)

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{4t} - \frac{11}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}.$$

Dette er den eneste vektorvaluerte funksjonen i verden som oppfyller problemet vi ville løse. ■

Argumentet vi brukte i eksempelet ovenfor viser seg å gjelde generelt, og vi har følgende (viktige) resultat:

**Teorem 4.19** *La $A \in M_n(\mathbb{R}), t_0 \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Det fins kun én løsning på initialverdiproblemet*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{b}.$$

## 4.3 Reelle løsninger fra komplekse egenverdier

Selv om vi skal løse reelle problemer kan det altså (ganske ofte) hende at vi må innom de komplekse tallene. I forrige kapittel tok vi for oss matriser med komplekse egenverdier. Når disse dukker opp som koeffisientmatriser i systemer av difflikninger på formen (4.1), må vi tenke litt annerledes enn i forrige avsnitt.

I forrige avsnitt jobbet vi med diagonaliserbare matriser, og brukte de lineært uavhengige egenvektorene til å danne lineært uavhengige egenfunksjoner. Vi har ikke sagt eksplisitt hva det betyr at *komplekse* vektorer er lineært uavhengige, men vi kan gjøre de samme definisjonene for $\mathbb{C}^n$, som for $\mathbb{R}^n$. Forskjellen er at vi har komplekse tall, både som skalarer, og i vektorer, og dermed også komplekse løsninger. Det viser seg (som vi har sett i MAT1001) at blant de komplekse løsningene skjuler det seg også reelle løsninger. Det er disse vi vil bruke, siden vi vil ha reelle løsninger på reelle problemer.

«Å løse et system på formen (4.1)» vil altså bety å finne de reelle løsningene. Underveis i letingen etter reelle løsninger når koeffisientmatrisen har komplekse egenverdier vil vi støte på *komplekse* vektorvaluerte funksjoner.

**Definisjon 4.20** *En kompleks vektorvaluert funksjon* $\mathbf{z}$ *er en funksjon som er definert på* $\mathbb{R}$ *og som tar verdier i* $\mathbb{C}^n$ *for en* $n \geq 2$*. En slik funksjon kan alltid skrives på formen*

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{y}(t)$$

*der* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{y}$ *er vektorvaluerte funksjoner som tar verdier i* $\mathbb{R}^n$*.*

Vi ser altså fortsatt på systemer på formen (4.1) der $A$ er koeffisientmatrisen ($A$ er reell!).

Anta nå at $\lambda = a + ib$ være en kompleks egenverdi til $A$ med tilhørende egenvektor

$$\mathbf{v} = \operatorname{Re}\mathbf{v} + i \operatorname{Im}\mathbf{v}.$$

Da er $\mathbf{z}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ en <u>kompleks</u> egenfunksjon til systemet, og dermed en (kompleks) løsning, dvs. at $\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t)$ (der $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{u}'(t) + i\mathbf{v}'(t)$).

Ved teorem 3.25 vet vi at $\overline{\lambda}$ også er en egenverdi til $A$ med tilhørende egenvektor $\overline{\mathbf{v}}$, så $e^{\overline{\lambda}t}\,\overline{\mathbf{v}}$ vil også være en kompleks løsning til systemet. De komplekse løsningene kommer altså i par. Vektorene $\mathbf{v}$ og $\overline{\mathbf{v}}$ er for øvrig to lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{C}^n$ (når $\lambda \notin \mathbb{R}$).

For å finne reelle løsninger trenger vi imidlertid to lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$. Neste resultat hjelper oss med det. Hver kompleks løsning gir nemlig opphav til to reelle løsninger:

**Teorem 4.21** *La* $\mathbf{z}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{y}(t)$ *være en kompleks løsning av systemet*

$$\mathbf{z}' = A\mathbf{z}.$$

*Da er både* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{y}$ *reelle løsninger til systemet.*

*Bevis:* Siden $\mathbf{z}$ er en løsning har vi

$$(\mathbf{u}(t) + i\mathbf{y}(t))' = A(\mathbf{u}(t) + i\mathbf{y}(t)),$$

som gir

$$\mathbf{u}'(t) + i\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{u}(t) + iA\mathbf{y}(t). \tag{4.5}$$

Ved å sammenligne realdelene og imaginærdelene i (4.5) får vi oppfylt

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u} \quad \text{og} \quad \mathbf{y}' = A\mathbf{y},$$

så $\mathbf{u}$ og $\mathbf{y}$ er reelle løsninger til systemet. $\square$

Vi går nå tilbake til paret av komplekse løsninger. For å finne de reelle løsningene trenger vi altså kun å bruke en av dem ved teorem 4.21. En av de komplekse løsningene er gitt ved

$$\mathbf{z}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{(a+ib)t}(\operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v}).$$

Fra MAT1001 husker vi at

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b.$$

Komplekse eksponentialer gjør altså at vi får inn trigonometriske funksjoner i de reelle løsningene. Vi har følgende utregning:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}(t) &= e^{at}e^{i(bt)}(\operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v}) \\
&= e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))(\operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v}) \\
&= e^{at}(\operatorname{Re}\mathbf{v}\cos(bt) - \operatorname{Im}\mathbf{v}\sin(bt)) + ie^{at}(\operatorname{Re}\mathbf{v}\sin(bt) + \operatorname{Im}\mathbf{v}\cos(bt)).
\end{aligned}$$

Vi har dermed skrevet $\mathbf{z}(t)$ på formen

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{y}(t)$$

der

$$\mathbf{u}(t) = e^{at}(\operatorname{Re}\mathbf{v}\cos(bt) - \operatorname{Im}\mathbf{v}\sin(bt)) \tag{4.6}$$

og

$$\mathbf{y}(t) = e^{at}(\operatorname{Re}\mathbf{v}\sin(bt) + \operatorname{Im}\mathbf{v}\cos(bt)). \tag{4.7}$$

Ved teorem 4.21 er (4.6) og (4.7) to reelle løsninger av systemet vi vil løse. Det kan også vises at disse er lineært uavhengige, og dermed har vi akkurat de vektorene vi trenger: Et par av kompleks konjugerte egenverdier gir opphav til de reelle løsningene

$$C_1\mathbf{u}(t) + C_2\mathbf{y}(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Når vi treffer på komplekse egenverdier i koeffisientmatrisen til et system, er det bedre å huske metoden ovenfor istedenfor formlene (4.6) og (4.7) (som er vanskelige å huske!). Vi tar et eksempel.

**Eksempel 4.22** Vi vil løse systemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 5x_1 + x_2. \end{cases}$$

Hvilke funksjoner oppfyller disse likningene?

Koeffisientmatrisen er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

og i eksempel 3.24 regnet vi ut at egenverdiene til $A$ er $\lambda = 1 \pm 5i$, og de tilhørende egenvektorene er

$$s\begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{C}, s \neq 0.$$

For å finne de reelle løsningene til systemet velger vi å bruke $\lambda = 1 + 5i$, og regner på den komplekse løsningen $\mathbf{z}(t) = e^{(1+5i)t}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$. Det gir

$$\begin{aligned} e^{(1+5i)t}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} &= e^t(\cos(5t) + i\sin(5t))(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) \\ &= e^t\Big(\cos(5t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin(5t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big) \\ &\quad + ie^t\Big(\sin(5t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(5t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big) \\ &= e^t\begin{bmatrix} -\sin(5t) \\ \cos(5t) \end{bmatrix} + ie^t\begin{bmatrix} \cos(5t) \\ \sin(5t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dette gir to reelle løsninger

$$\mathbf{u}(t) = e^t\begin{bmatrix} -\sin(5t) \\ \cos(5t) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y}(t) = e^t\begin{bmatrix} \cos(5t) \\ \sin(5t) \end{bmatrix}.$$

Siden $\mathbf{u}(0)$ og $\mathbf{y}(0)$ er lineært uavhengige (sjekk!) vektorer i $\mathbb{R}^2$, så er $\mathbf{u}$ og $\mathbf{y}$ lineært uavhengige løsninger ved teorem 4.8. Alle de reelle løsningene til systemet er dermed gitt ved lineære kombinasjoner av disse:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1e^t\begin{bmatrix} -\sin(5t) \\ \cos(5t) \end{bmatrix} + C_2e^t\begin{bmatrix} \cos(5t) \\ \sin(5t) \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Vi ser altså at trigonometriske funksjoner kommer inn i løsningsformlene, og vi kan ikke lese av egenverdiene og egenvektorene direkte (slik vi kan når $A$ er diagonaliserbar over $\mathbb{R}$). ■

Vi oppsummerer hvordan vi får **reelle løsninger til systemet (4.1)**

**fra komplekse egenverdier til $A$:**

- Når $\lambda = a \pm ib$ er egenverdier til $A$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}$ og $\overline{\mathbf{v}}$ bruker vi kun en av egenverdiene, f.eks. $\lambda = a + ib$.
- Vi skriver den komplekse løsningen $\mathbf{z}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ som

  $$\mathbf{z}(t) = e^{(a+ib)t}(\operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v})$$

  og regner ut

  $$\mathbf{u}(t) = \operatorname{Re}\mathbf{z}(t) \quad \text{og} \quad \mathbf{y}(t) = \operatorname{Im}\mathbf{z}(t).$$

- Bidraget til de reelle løsningene til systemet er en lineær kombinasjon av $\mathbf{u}(t)$ og $\mathbf{y}(t)$.

Vi tar et $3 \times 3$-eksempel med komplekse egenverdier:

**Eksempel 4.23** Vi vil løse initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette er et ganske langt eksempel å regne gjennom. Det gir god trening å sjekke alle utregningene underveis!

Egenverdiene til $A$ er $\lambda = -2$ og $\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$ (ved å gjette på den reelle roten i det karakteristiske polynomet $-\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 6 = 0$ finner vi $\lambda = -2$).

Egenvektorene finner vi ved å finne $\operatorname{Nul}(A - \lambda I)$ (og ta vekk $\mathbf{0}$). For

$\underline{\lambda = -2}$ er de tilhørende egenvektorene

$$s \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, s \neq 0.$$

For $\underline{\lambda = -1 + i\sqrt{2}}$ er de tilhørende egenvektorene

$$s \begin{bmatrix} 2 - i\sqrt{2} \\ -1 - i\sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{C}, s \neq 0.$$

De tilhørende egenvektorene til $-1-i\sqrt{2}$ er de konjugerte til vektorene ovenfor, men med hensyn på reelle løsninger trenger vi ikke disse.

Vi regner først ut bidraget til de reelle løsningene fra de komplekse egenverdiene. Vi får

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}(t) &= e^{(-1+i\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} 2 - i\sqrt{2} \\ -1 - i\sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= e^{-t}(\cos(t\sqrt{2}) + i\sin(t\sqrt{2}))\Bigg( \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg) \\
&= e^{-t}\Bigg( \cos(t\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \sin(t\sqrt{2}) \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg) \\
&\quad + ie^{-t}\Bigg( \sin(t\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \cos(t\sqrt{2}) \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg)
\end{aligned}$$

Til sammen gir dette den generelle løsningen

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 2\cos(t\sqrt{2}) + \sqrt{2}\sin(t\sqrt{2}) \\ -\cos(t\sqrt{2}) + \sqrt{2}\sin(t\sqrt{2}) \\ 3\cos(t\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

$$+C_3 e^{-t}\begin{bmatrix} 2\sin(t\sqrt{2}) - \sqrt{2}\cos(t\sqrt{2}) \\ -\sin(t\sqrt{2}) - \sqrt{2}\cos(t\sqrt{2}) \\ 3\sin(t\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

der $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Initialbetingelsen gir

$$\mathbf{x}(0) = C_1\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dette gir et lineært likningssystem som vi løser ved følgende radredusering (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

så $C_1 = 1, C_2 = -1$ og $C_3 = 0$. Siden dette systemet har én løsning, vil vektorene i koeffisientmatrisen til systemet være lineært uavhengige ved Invertibelmatriseteoremet, så vi har samtidig sjekket at løsningene som utspenner den generelle løsningen er lineært uavhengige.

Løsningen på initialverdiproblemet er

$$\mathbf{x}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-t}\begin{bmatrix} 2\cos(t\sqrt{2}) + \sqrt{2}\sin(t\sqrt{2}) \\ -\cos(t\sqrt{2}) + \sqrt{2}\sin(t\sqrt{2}) \\ 3\cos(t\sqrt{2}) \end{bmatrix}.$$

■

## 4.4 Inhomogene systemer, likevekt og stabilitet

Til nå har vi sett hvordan vi kan løse en del systemer av typen (4.1). Disse systemene er homogene. Som vi også har sett i MAT1001, er neste skritt å se på de *inhomogene* systemene. Det vil for oss si systemer på formen

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \qquad\vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases} \tag{4.8}$$

der $a_{ij}, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Vi kan skrive (4.8) på matriseform

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

der $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Systemet (4.8) er et inhomogent system av $n$ første ordens lineære difflikninger med konstante koeffisienter. Inhomogent siden $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Når vi først har lært å løse homogene systemer (der $\mathbf{b} = \mathbf{0}$), vil løsningene til (4.8) være greie å finne, som vi straks skal se.

La oss kort filosofere over hva vi holder på med: I et system av difflikninger er det flere funksjoner som er involvert, samt deres deriverte funksjoner, som måler forandringene til funksjonene.

Funksjonene varierer gjerne med tiden $t$ som variabel. I en verden full av kaos er vi ofte interessert i å finne tidspunkter der «systemet er i ro», dvs. når de deriverte er 0. Vi sier da at systemet er i en *likevektstilstand*. Dette er et viktig begrep i difflikningsteori. Vi definerer:

**Definisjon 4.24** *Likevektspunktene til et system av difflikninger i funksjonene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er alle løsningene til systemet som fremkommer ved å sette uttrykkene for $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ lik 0.*

For et homogent system $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ finner vi altså likevektspunktene ved å løse systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dvs. ved å bestemme $\mathrm{Nul}(A)$. I dette tilfellet er $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alltid en løsning.

Hva så med likevektspunkter for inhomogene systemer?

**Eksempel 4.25** Vi vil finne likevektspunktene til det inhomogene systemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 5x_2 + 4 \\ x_2' = -2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Vi setter uttrykkene for $x_1'$ og $x_2'$ lik 0. Det gir likningssystemet

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Det er som kjent flere måter å løse dette på. Løsningen er uansett $(x_1, x_2) = (4, -4)$, som er (det eneste) likevektspunktet til systemet.

Vi observerer at systemet av difflikninger kan skrives som

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Likevektspunktet finner vi ved å løse $A\mathbf{x} = -\mathbf{b}$, og siden $A$ er inverterbar, så er likevektspunktet gitt ved $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot (-\mathbf{b})$. ■

Generelt ser vi at for å finne likevektspunktene til et system på formen (4.8) får vi

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

dvs. likningssystemet

$$A\mathbf{x} = -\mathbf{b}.$$

Dette er et lineært likningssystem som har ingen, én eller uendelig mange løsninger.

Hvis vi antar at $A$ er inverterbar har vi én løsning ved Invertibelmatrise-teoremet, og vi får en formel for likevektspunkt*et*:

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot (-\mathbf{b}).$$

Vi ønsker nå å løse systemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}. \tag{4.9}$$

Vi har allerede lært hvordan vi i en del tilfeller løser det tilhørende homogene systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, så la oss starte med dette systemet for å se hva slags manipulasjoner vi må gjøre for å ende opp med (4.9). Vi har (med $\mathbf{y}$ for $\mathbf{x}$):

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Vi trekker følgende utregninger opp av hatten, der vi antar at $A$ er inverterbar:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= A\mathbf{y} \\ \mathbf{y}' &= A\mathbf{y} - \mathbf{b} + \mathbf{b} && \text{(siden } -\mathbf{b} + \mathbf{b} = \mathbf{0}) \\ \mathbf{y}' &= A(\mathbf{y} - A^{-1}\mathbf{b}) + \mathbf{b} && \text{(siden } AA^{-1} = I) \end{aligned}$$

Vi setter nå $\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{y} - A^{-1}\mathbf{b}}$. Da er $\mathbf{x}' = \mathbf{y}'$ siden $A^{-1}\mathbf{b}$ består av skalarer, så vi får

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

som er systemet vi vil løse! Vi ser derfor på utregningene vi har gjort en gang til:

For å få utregningene til å virke må vi *anta at $A$ er inverterbar.* Vi ser altså fordelen med å jobbe med inverterbare matriser: Ved å kunne bruke $A^{-1}$ kan vi utlede formler.

Videre ser vi at forskjellen på $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = -A^{-1}\mathbf{b} = A^{-1} \cdot (-\mathbf{b}),$$

som vi gjenkjenner som likevektspunktet til $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ når $A$ er inverterbar. Vi får altså løsningene til det inhomogene systemet som $\mathbf{x}$ oppfyller ved å summere løsningene til det homogene systemet som $\mathbf{y}$ oppfyller og likevektspunktet $A^{-1} \cdot (-\mathbf{b})$.

(Vi bemerker analogien til MAT1001 der vi løste inhomogene differenslikninger: Løsningene var gitt ved å summere løsningene til den tilhørende homogene likningen og en spesiell løsning.)

Dette gir følgende **metode for å løse det inhomogene systemet**

$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ **når** $A$ **er inverterbar**:

1) Vi løser det tilhørende homogene systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

2) Vi løser $A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$, dvs. vi finner likevektspunktet.

3 Vi får den generelle løsningen til $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ved å summere løsningene i 1) og 2).

**Eksempel 4.26** Vi vil løse det inhomogene systemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 5x_2 + 4 \\ x_2' = -2x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Koeffisientmatrisen er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

I eksempel 4.25 så vi at denne er inverterbar, så vi bruker metoden ovenfor.

Vi finner først de funksjonene som oppfyller det homogene systemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Matrisen $A$ har egenverdier (sjekk!) $\lambda = 1 \pm i$. Vi bruker kun egenverdien $\lambda = 1 + i$ og de tilhørende egenvektorene (sjekk!)

$$s \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, s \neq 0.$$

Den komplekse løsningen gir følgende utregning:

$$\begin{aligned} & e^{(1+i)t}\Big( \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Big) \\ = \quad & e^t(\cos t + i \sin t)\Big( \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Big) \\ = \quad & e^t(\cos t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} - \sin t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}) + ie^t(\cos t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}). \end{aligned}$$

Dette gir den reelle generelle løsningen av det homogene systemet (sjekk!)

$$\mathbf{x}(t) = C_1\, e^t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2\, e^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cos t - \frac{3}{2}\sin t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

der $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

I eksempel 4.25 fant vi likevektspunktet $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$, så dermed har det inhomogene systemet den generelle løsningen

$$\mathbf{x}(t) = C_1\, e^t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2\, e^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cos t - \frac{3}{2}\sin t \\ \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

der $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ■

Et beslektet og minst like viktig begrep som likevekt er *stabilitet*. Vi kan da for eksempel spørre (som vi også drøftet i MAT1001):
<u>Går alle løsninger mot likevekt når $t \to \infty$?</u>

Vi skal ikke gi en formell definisjon på stabilitet, men det kan være nyttig å merke seg følgende:

**Teorem 4.27** *La $A$ være koeffisientmatrisen til et system på formen (4.8) og anta at $A$ er inverterbar. Den generelle løsningen $\mathbf{x}$ til systemet går mot likevekt når $t \to \infty$ hvis og bare hvis alle egenverdiene til $A$ er på formen $\lambda = a + ib$ der $a < 0$.*

*Forklaring til teorem 4.27:* Vi har systemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \text{der } A \text{ er inverterbar.} \tag{4.10}$$

Løsningene til (4.10) er gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^h(t) + A^{-1} \cdot (-\mathbf{b})$$

der $\mathbf{x}^h(t)$ er løsningene til det tilhørende homogene systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, og $A^{-1} \cdot (-\mathbf{b})$ er likevektspunktet.

Når alle egenverdiene til $A$ er på formen $\lambda = a + ib$ der $a < 0$, vil alle leddene i $\mathbf{x}^h(t)$ ha $e^{at}$ som en faktor. Den dominerende faktoren i hvert av disse leddene er $e^{at}$, og siden $a < 0$ vil $\mathbf{x}^h(t)$ gå mot 0 når $t \to \infty$. Dermed vil løsningen til (4.10) gå mot likevektspunktet $A^{-1} \cdot (-\mathbf{b})$ når $t \to \infty$ i dette tilfellet.

Med andre ord har vi at

$$\lim \mathbf{x}(t)_{t\to\infty} = A^{-1} \cdot (-\mathbf{b})$$

der

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \lim_{t\to\infty} x_1(t) \\ \lim_{t\to\infty} x_2(t) \\ \vdots \\ \lim_{t\to\infty} x_n(t) \end{bmatrix}$$

når $\mathbf{x}$ oppfyller systemet (4.10) og alle egenverdiene til $A$ har negativ realdel.

**Eksempel 4.28** Systemet

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 5 \\ x_2' = 8x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

har koeffisientmatrise

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Matrisen $A$ er inverterbar, og vi finner at likevektspunktet er (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{40}{3} \end{bmatrix}.$$

Vil alle løsningene til systemet gå mot likevekt når $t \to \infty$?

Egenverdiene til $A$ er (sjekk!) $-1$ og $-3$, så dermed er egenverdiene på formen $a + ib$ der $a < 0$. Teorem 4.27 gir dermed at løsningene vil gå mot likevekt når $t \to \infty$.

Vi kan også sjekke at løsningene til systemet er (gjør det!)

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{40}{3} \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

og vi ser at (sjekk!)

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{40}{3} \end{bmatrix},$$

som er likevektspunktet til systemet. ■

## 4.5 Anvendelser

Du lurer sikkert på hva slags problemer du kan løse med all denne teorien i bagasjen? For det første, teorien har vært nødvendig for å forstå løsninger av systemer av difflikninger, og således kunne løse en del av dem.

Dessuten er veien nå åpen for å ta fatt på større problemer. Difflikninger dukker opp i mange anvendelser. Vi har nå sett starten på verdenen av difflikninger, der vi har tatt for oss noen spesielle systemer.

La oss se et par eksempler på anvendelser vi kan løse med $2 \times 2$- og $3 \times 3$-systemene vi har lært å løse (du vil finne noen flere i de tidligere eksamensoppgavene): Det nye nå, vil være å gå fra problem til likning. Så fort vi har systemet av likninger, er vi på kjent matematisk grunn, og kan løse problemet.

Når vi nå skal se på noen anvendelser, skal vi finne problemer som kan modelleres ved hjelp av den typen systemer av difflikninger som vi har sett på i dette kapittelet. Modellering innen ulike områder krever fagekspertise på området. Vi skal nå se på noen kjente bruksområder for likningssystemer av typen (4.8).

Som alltid i forskning, vil problemer gjerne skape nye problemer. For eksempel ved at vi må påtvinge flere og flere antagelser i modellen. Vi vil alltid kunne finne *mer* kompliserte systemer som vil involvere funksjoner med *flere* variabler (såkalte partielle difflikninger). Det er også derfor mottoet til MAT1012 er «Mer matematikk». Kurset er en hjelp videre og på stø kurs rett inn i dagens forskning. Og jo mer du forstår av matematikken du bruker i ditt fag, jo bedre.

**Eksempel 4.29** Vi skal se på en enkel modell for dynamikken mellom glukose/blodsukker og insulin i et individ: Da trenger vi å vite at glukose bl.a. dannes fra maten vi spiser, og går bl.a. via leveren ut til de ulike cellene i kroppen for å gi energi. Hormonet insulin dannes i bukspyttkjertelen når blodsukkeret stiger, og hjeper bl.a. glukosen inn i cellene, slik at blodsukkernivået ikke blir for høyt. Insulin brytes bl.a. ned i leveren.

Et individs mekanismer er komplekst, og forekomstene av uttrykket «bl.a.» ovenfor gjør nettopp at modellen vi skal se på er «enkel». Jo flere ting vi tar hensyn til, jo mer komplisert blir modellen. For nøyaktighetens skyld skal man jo ta hensyn til så mye man kan. På den andre siden, kan en enkel modell ofte være det vi trenger, og også det som gjør det hele mer oversiktlig - så kan man lage mer kompliserte modeller basert på den enkle modellen.

Vi lar $x(t)$ være avvik i glukosekonsentrasjonen i blodet i forhold til normalt nivå, målt i mg/ml, mens $y(t)$ er avvik i insulinkonsentrasjonen, målt i enheter/ml, ved tiden $t$, som måles i timer. (Dvs. at positive verdier for $x$ og $y$ måler konsentrasjonene over normalt nivå, mens negative verdier måler konsentrasjonene under normalt nivå.)

En enkel modell for dynamikken mellom glukose og insulin er følgende system av difflikninger:

$$\begin{cases} x' = -ax - by \\ y' = cx - dy, \end{cases} \qquad a, b, c, d > 0.$$

I denne modellen avhenger forandringen i glukosekonsentrasjonen av at glukosen absorberes i leveren, som modelleres av leddet $-ax$, og at glukosen tas opp i cellene, som modelleres av leddet $-by$ (lineære ledd!).

Forandringen i insulinkonsentrasjonen har vi modellert som

$$y' = cx - dy,$$

så $y'$ avhenger av at insulin produseres i bukspyttkjertelen (leddet $cx$), og at det nedbrytes i leveren (leddet $-dy$).

Vi kan nå løse og drøfte dette systemet for ulike verdier av parameterne $a, b, c$ og $d$. Den teoretiske modellen kan tilpasses virkeligheten ved hjelp av eksperimenter, der man finner verdier for $a, b, c$ og $d$.

La oss for eksempel se hva verdiene $a = 3$, $b = 4{,}3$, $c = 0{,}2$ og $d = 0{,}8$ gir oss. Vi har dermed systemet

$$\begin{cases} x' = -3x - 4{,}3y \\ y' = 0{,}2x - 0{,}8y, \end{cases}$$

Koeffisientmatrisen er

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4{,}3 \\ 0{,}2 & -0{,}8 \end{bmatrix},$$

som er inverterbar. Siden systemet er homogent vil likevektspunktet være $(x(t), y(t)) = (0, 0)$, som er det normale nivået for glukose og insulin i blodet.

Egenverdiene til $A$ er (sjekk!)

$$\lambda = \frac{-3{,}8 \pm \sqrt{1{,}4}}{2},$$

som gir

$$\lambda \approx -1{,}308 \qquad \text{og} \qquad \lambda \approx 2{,}492.$$

Siden egenverdiene er reelle og negative, vil løsningene til dette systemet gå mot likevekt når $t \to \infty$ ved teorem 4.27, dvs. i denne modellen med parameterverdiene vi ser på vil glukose- og insulin-nivået normaliseres.

Vi nevner at vi kan finne løsningene til dette systemet også, men nå får vi inn desimaltall og vi må avrunde. Da vil det være litt vanskeligere å finne for eksempel egenvektorene. Vi tar allikevel med noen tall som et eksempel (vi tar også med noen ekstra desimaler underveis, slik at du kan overbevise deg selv om at de avrundede tallene stemmer). Ved hjelp av programvare kan vi finne at de tilhørende egenvektorene til $\lambda \approx -1{,}308$ er (tilnærmet)

$$s \begin{bmatrix} 0{,}9306 \\ -0{,}3661 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, s \neq 0.$$

For $\lambda \approx 2{,}492$ får vi (tilnærmet) egenvektorene

$$s \begin{bmatrix} -0{,}9931 \\ 0{,}1174 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, s \neq 0.$$

Det gir generell løsning (avrundet til to desimaler)

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-1{,}31t} \begin{bmatrix} 0{,}93 \\ -0{,}36 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2{,}49t} \begin{bmatrix} -0{,}99 \\ 0{,}12 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

La oss se hvor mye glukose og insulin det er i blodet etter noen timer hvis vi lar $x(0) = 1$ og $y(0) = 0$: Initialbetingelsen gir likningssystemet

$$\begin{cases} 0{,}9366C_1 - 0{,}9931C_2 = 1 \\ -0{,}3661C_1 + 0{,}1174C_2 = 0, \end{cases}$$

som har tilnærmede løsninger

$$C_1 \approx -0{,}4769 \quad \text{og} \quad C_2 \approx -1{,}4872.$$

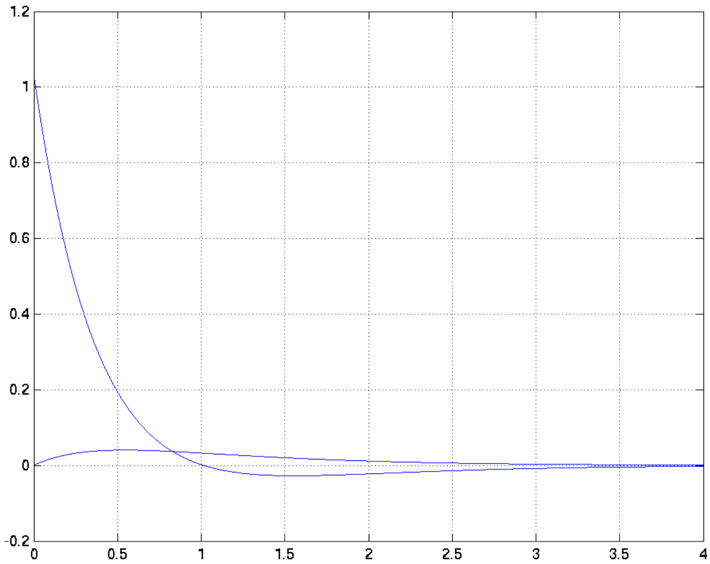
Dette gir løsningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = -0{,}48e^{-1{,}31t} \begin{bmatrix} 0{,}93 \\ -0{,}36 \end{bmatrix} - 1{,}49e^{-2{,}49t} \begin{bmatrix} -0{,}99 \\ 0{,}12 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nå regne ut f.eks. avviket fra normalen i glukose- og insulin-konsentrasjonen for $t = 1, 2, 3$ og $4$ (før individet spiser mer mat):

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | 1 | 0,0023 | −0,0223 | −0,0079 | −0,0023 |
| $y(t)$ | 0 | 0,0327 | 0,0116 | 0,0033 | 0,0009 |

Nedenfor ser du grafene til $x$ og $y$ for $t \in [0, 4]$:




Grafen til $x$ viser avvik i glukosekonsentrasjonen i blodet. Denne grafen starter i punktet $(0, 1)$, og har et bunnpunkt som inntreffer litt etter at toppunktet til grafen til $y$ inntreffer. Grafen til $y$ viser avvik i insulinkonsentrasjonen i blodet, og starter i punktet $(0, 0)$.

Vi har sett at i denne modellen med våre valgte parameterverdier vil glukose- og insulinkonsentrasjonen i blodet normaliseres, noe grafene også viser. ■

Systemer av første ordens difflikninger kan brukes til **å løse difflikninger av høyere orden**: Enhver $n$-te ordens difflikning i variabelen $y$ kan gjøres om til et system av første ordens difflikninger i variablene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ved å sette

$$\boxed{x_1 = y,\ x_2 = y',\ x_3 = y'',\ \ldots,\ x_n = y^{(n-1)}}$$

der $y^{(n-1)}$ er den $(n-1)$-te deriverte funksjonen til $y$. Når vi deriverer får vi spesielt at $x_n' = y^{(n)}$, og vi setter da inn uttrykket for $y^{(n)}$ fra den $n$-te ordens likningen. Vi viser metoden på et eksempel.

**Eksempel 4.30** Vi vil gjøre om likningen

$$4y^{(4)} + y^{(3)} - 5y = 0$$

til et system av første ordens difflikninger.

Siden likningen er av fjerde orden, vil vi få fire likninger i funksjonene $x_1, x_2, x_3$ og $x_4$. Vi må dermed finne uttrykk for $x'_1, x'_2, x'_3$ og $x'_4$ for å få et system av difflikninger. Vi setter

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= y' \\ x_3 &= y'' \\ x_4 &= y^{(3)} \end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned} x'_1 &= y' = x_2 \\ x'_2 &= y'' = x_3 \\ x'_3 &= y^{(3)} = x_4 \\ x'_4 &= y^{(4)} = \tfrac{-y^{(3)}+5y}{4} = -\tfrac{1}{4}x_4 + \tfrac{5}{4}x_1. \end{aligned}$$

Dermed har vi gjort om den fjerde ordens likningen til systemet

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4. \end{cases}$$

Koeffisientmatrisen er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Ved å løse systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ vil vi spesielt finne funksjonen $x_1$; siden $x_1 = y$ vil vi dermed finne løsningen $y$ til den fjerde ordens likningen. ■

I neste eksempel skal vi se på en andre ordens difflikning. Likningen er altså ikke av så høy orden, men til gjengjeld er den en viktig likning (bl.a. i fysikalsk kjemi).

**Eksempel 4.31** I 1926 stilte fysikeren Erwin Schrödinger opp en likning for å regne ut såkalte *bølgefunksjoner*. Schrödingers bølgelikning danner grunnlaget for bølgemekanikken i moderne kvantefysikk. Den beskriver en partikkel ved hjelp av en bølgefunksjon $\Psi(x, y, z, t)$ som sier noe om sannsynligheten for å finne partikkelen i punktet $(x, y, z)$ ved tiden $t$.

Vi skal konsentrere oss om matematikken bak denne likningen. Vi ser på den såkalte tidsuavhengige schrödingerlikningen for en partikkel med masse $m$ som beveger seg i én dimensjon med energi $E$. Denne likningen er gitt ved

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + V\Psi = E\Psi,$$

der $\hbar$ er en konstant og $V$ er den potensielle energien. Vi skal se på tilfellet der partikkelen er i fri bevegelse, dvs. den beveger seg i et område der den potensielle energien er 0. Det gir likningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' = E\Psi. \tag{4.11}$$

Hvordan ser bølgefunksjonene ut i dette tilfellet?

Likningen (4.11) kan løses som en andre ordens difflikning med metoden vi har sett i MAT1001 (gjør gjerne det!), og vi avslører allerede nå at løsningene er harmoniske svingninger.

Vi vil imidlertid løse likningen (4.11) ved å gjøre den om til et system av to første ordens difflikninger (og sjekke at vi får harmoniske svingninger).

Vi setter

$$x_1 = \Psi \quad \text{og} \quad x_2 = \Psi'.$$

Det gir $x_1' = \Psi' = x_2$, og

$$x_2' = \Psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi = -\frac{2mE}{\hbar^2}x_1.$$

For å løse (4.11) skal vi dermed løse systemet

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{2mE}{\hbar^2}x_1, \end{cases}$$

og vi er på kjent grunn. Koeffisientmatrisen er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2mE}{\hbar^2} & 0 \end{bmatrix},$$

som har egenverdier (sjekk!)

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Vi innfører $\boxed{k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$, og bruker egenverdien $\lambda = ik$ i jakten på reelle løsninger. De tilhørende egenvektorene er (sjekk!)

$$s\begin{bmatrix} -\frac{i}{k} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, s \neq 0,$$

og vi finner de reelle løsningene ved å regne ut

$$e^{ikt}\Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -\frac{1}{k} \\ 0 \end{bmatrix}\Big).$$

Det gir følgende løsninger til systemet (sjekk!):

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} \frac{1}{k}\sin(kt) \\ \cos(kt) \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} -\frac{1}{k}\cos(kt) \\ \sin(kt) \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

og dermed har (4.11) løsninger

$$\Psi(t) = x_1(t) = \frac{C_1}{k}\sin(kt) - \frac{C_2}{k}\cos(kt), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

der $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Løsningene er riktignok harmoniske svingninger, og løsningene kan studeres videre, med initialbetingelser, og for ulike verdier av $E$. ■

Neste eksempel tar for seg matematiske krigsteorier, for å vise at difflikninger dukker opp i veldig mange sammenhenger (se for øvrig Brauns bok *Differential Equations and Their Applications* for mer om krigsteorier og andre anvendelser).

**Eksempel 4.32** For å få et eksempel med 3 likninger skal vi se på et tenkt forhold mellom tre land $X_1, X_2$ og $X_3$. Hvert land ønsker å forsvare seg mot et mulig angrep fra et av de andre landene, og mener det er en reell sjanse for angrep, noe som baseres på de andre landenes lignende tanker.

Vi skal se litt på konfliktteorien til Richardson, der vi skal sette opp et system av difflikninger i variablene $x_1, x_2$ og $x_3$. Funksjonsuttrykket $x_i(t)$ måler «krigspotensialet», dvs. opprustningen, til landet $X_i$ ved tiden $t$.

Før vi går videre merker vi oss følgende sitat fra Richardson:*The process described by the ensuing equations is not to be thought of as inevitable. It is what would occur if instinct and tradition were allowed to act uncontrolled.*

Vi skal nå bruke det vi har lært til å analysere en mulig krigsmodell: Forandringen i opprustningen til landet $X_i$ måles av $x_i'$. Blant annet vil opprustningen til de andre landene bidra til $x_i'$. I en enkel modell kan vi la leddene $k_j x_j$, $j \neq i$, $k_j > 0$ representere et slikt bidrag (vi kan kalle $k_j$ en «forsvarskoeffisient»).

Videre kan vi tenke oss at landene bærer nag til hverandre, som vi kan anta gir et konstant bidrag $b_i$ til $x_i'$, $b_i > 0$.

Vi antar også at vi har et negativt bidrag til $x_i'$, på grunn av økonomi, dvs. kostnadene på opprustningen. Vi representerer dette bidraget med $-\alpha_i x_i$, $\alpha_i > 0$ (vi kan kalle $\alpha_i$ en «hindringskoeffisient»).

Hvis vi nå i tillegg antar at alle landene har samme forsvarskoeffisient $k > 0$ og samme hindringskoeffisient $\alpha > 0$, gir dette følgende inhomogene system av første ordens lineære difflikninger med konstante koeffisienter:

$$\begin{cases} x_1' = -\alpha x_1 + k x_2 + k x_3 + b_1 \\ x_2' = k x_1 - \alpha x_2 + k x_3 + b_2 \\ x_3' = k x_1 + k x_2 - \alpha x_3 + b_3 \end{cases}$$

Vi løste det tilhørende homogene systemet (der $b_1, b_2, b_3 = 0$) i eksempel 4.15, og vi fant løsningene

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{(-\alpha-k)t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-\alpha-k)t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-\alpha+2k)t},$$

der $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Som vi vet vil eksperimenter kunne gi oss verdier på parameterne, og si oss om modellen er en god modell eller ikke. Verdier til parametere i krigsmodeller kan skaffes ved å se på historien, blant annet på hvordan ulike land/allianser rustet opp før en krig.

Vi kan uansett si noe om modellen vi ser på ved å bruke de generelle parameterne: Egenverdiene til koeffisientmatrisen $A$ er $-\alpha - k$ og $-\alpha + 2k$. Hvis $\alpha \neq 2k$ er $A$ inverterbar (ved Invertibelmatriseteoremet siden alle egenverdiene er forskjellig fra 0), og likevektspunktet er gitt ved $A^{-1} \cdot (-\mathbf{b})$.

Ved teorem 4.27 vil systemet gå mot likevekt når (sjekk!)

$$2k < \alpha.$$

Når hindringskoeffisienten $\alpha$ derimot er mindre enn $2k$, vil (sjekk!)

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \infty,$$

og våre antagelser gir da et system som er «ute av kontroll». ■

## 4.6 Nå skal du kunne

- definisjonen av vektorvaluert funksjon, lineært uavhengige vektorvaluerte funksjoner, kompleks vektorvaluert funksjon, homogent og inhomogent system av første ordens lineære difflikninger med konstante koeffisienter, frakoblet system av difflikninger, basisfunksjon, egenfunksjon, initialbetingelse til et system av difflikninger, initialverdiproblem, likevektspunktene til et system av difflikninger

- forklare hva det vil si at «løsningsrommet til (4.1) har dimensjon $n$»

- frakoblingsteoremet, og bruke frakoblingsmetoden til å løse systemer $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ der $A$ er diagonaliserbar

- finne de reelle løsningene til systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ når $A$ har kompleks konjugerte egenverdier

- løse det inhomogene systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ når $A$ er inverterbar
- finne likevektspunktet til systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ når $A$ er inverterbar, og sjekke om løsningene går mot likevekt når $t \to \infty$
- forklare hva slags type problemer som gir opphav til systemer av første ordens lineære difflikninger
- mer matematikk!, spesielt mer lineær algebra, til videre bruk

## 4.7 Oppgaver, kapittel 4

I tillegg til oppgavene gitt her vil det også legges ut et hefte med tidligere eksamensoppgaver der det er flere oppgaver med systemer av difflikninger, også tekstoppgaver. Dessuten minner vi gjerne om at det er fin regnetrening å regne gjennom alle eksemplene (også fint som repetisjon).

**Oppgave 87** Finn den generelle (reelle) løsningen til systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ der

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**Oppgave 88** Løs systemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

**Oppgave 89** Løs initialverdiproblemet.

a) $$\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -x_2 \\ x_3' = -x_2 - 2x_3, \end{cases} \qquad (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-2, 0, 3)$$

b) $$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_3 \\ x_3' = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3, \end{cases} \qquad (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 1, 1)$$

(*Hint:* $\lambda = -1$ er en egenverdi.)

c) $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 2x_2 + x_3, \end{cases} \qquad (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2, 2, 2)$

**Oppgave 90** (tidligere eksamensoppgave)

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{4} \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Finn den generelle løsningen for differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + \frac{5}{4}y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y \end{cases} \qquad (1)$$

c) Finn den løsningen av systemet (1) som tilfredsstiller initialbetingelsen

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 2$$

**Oppgave 91** (tidligere eksamensoppgave) Betrakt differensiallikningsystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y - 5 \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y - 7 \end{cases} \qquad (2)$$

a) Finn likevektspunktet for systemet og den generelle løsningen.

b) Bestem den løsningen av systemet (2) som oppfyller initialbetingelsen $x(0) = 5$, $y(0) = 0$.

**Oppgave 92** Skriv om difflikningen

$$y^{(4)} + y'' = 1$$

til et system av første ordens difflikninger.

**Oppgave 93** I eksempel 13.8 i *Matematisk verktøykasse* så vi på en modell for rovdyr og byttedyr. Modellen ga opphav til følgende system av difflikninger

$$\begin{cases} x'(t) = by(t) \\ y'(t) = -cx(t), \end{cases} \qquad b, c > 0$$

med initialbetingelse $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

I MAT1001 løste vi systemet ved å gjøre om systemet til en andre ordens difflikning og fikk løsningen

$$\begin{aligned} x(t) &= y_0\sqrt{\tfrac{b}{c}}\sin(t\sqrt{bc}) + x_0\cos(t\sqrt{bc}) \\ y(t) &= y_0\cos(t\sqrt{bc}) - x_0\sqrt{\tfrac{c}{b}}\sin(t\sqrt{bc}). \end{aligned}$$

Finn denne løsningen ved å bruke metodene fra MAT1012.

**Oppgave 94** La

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & k & k \\ k & -\alpha & k \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad k, \alpha > 0.$$

a) Finn egenverdiene til $A$.

Vi beholder notasjonen i eksempel 4.32 om forholdet mellom landene $X_1, X_2$ og $X_3$, og tar utgangspunkt i modellen vi brukte der. Vi modifiserer modellen ved å forandre på situasjonen til landet $X_3$, og setter opp systemet

$$\begin{cases} x_1' = -\alpha x_1 + kx_2 + kx_3 \\ x_2' = kx_1 - \alpha x_2 + kx_3 \\ x_3' = -\alpha x_3, \end{cases} \qquad k, \alpha > 0. \tag{4.12}$$

b) Gi en kort tolkning av landet $X_3$ sin opprustning i følge modellen (4.12).

c) Hvilken betingelse må $k$ og $\alpha$ oppfylle for at løsningene til (4.12) skal gå mot likevekt når $t \to \infty$?

## 4.8 Fasit, kapittel 4

**Oppgave 87**

a) $\mathbf{x}(t) = C_1\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\, e^{4t} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

b) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} -\cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\sin t + \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

c) $\mathbf{x}(t) = C_1 e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) - \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) \\ 2\sin(2t) \end{bmatrix},$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

d) $\mathbf{x}(t) = C_1\, e^{-10t} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2\, e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + C_3\, e^{5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$
$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

**Oppgave 88**

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3\, e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

**Oppgave 89**

a) $\mathbf{x}(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{9} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{2}{9} e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{5}{9} e^{8t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 4e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{bmatrix}$

**Oppgave 90**

a) $\lambda = \frac{9}{2}$ med tilhørende egenvektorer $s \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}, s \neq 0$ og $\lambda = \frac{1}{2}$ med tilhørende egenvektorer $s \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}, s \neq 0$

b) $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\frac{9}{2}t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ 1 \end{bmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

c) $(x(t), y(t)) = (e^{\frac{9}{2}t}, 2e^{\frac{9}{2}t})$

**Oppgave 91**

a) Likevekt $(x, y) = (2, 1)$,
$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $(x(t), y(t)) = (e^{4t} + 2e^{-2t} + 2, e^{4t} - 2e^{-2t} + 1)$

**Oppgave 92**

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = 1 - x_3 \end{cases}$$

**Oppgave 93** ikke fasit

**Oppgave 94**

a) $-\alpha, -\alpha \pm k$

b) ønsker fred(?)

c) $k < \alpha$

# Notasjon

| | |
|---|---|
| $\{\}$ | mengde |
| $\in$ | element i |
| $\mathbb{N}$ | de naturlige tallene 1,2,3,... |
| $\mathbb{Z}$ | de hele tallene $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ |
| $\mathbb{Q}$ | de rasjonale tallene (brøker) |
| $\mathbb{R}$ | de reelle tallene (tallinjen) |
| | med ordet 'tall' menes et reelt tall |
| $i\mathbb{R}$ | de imaginære tallene |
| $\mathbb{C}$ | de komplekse tallene |
| $\mathbb{R}^2$ | det reelle planet |
| $\mathbb{R}^3$ | det reelle rommet |
| $\mathbb{R}^n$ | det $n$-dimensjonale reelle rommet |
| $M_n(R)$ | $n \times n$-matriser med komponenter i $\mathbb{R}$ |
| $GL_n(\mathbb{R})$ | inverterbare $n \times n$-matriser med komponenter i $\mathbb{R}$ |
| $\square$ | avslutter et *Bevis* |
| $\blacksquare$ | avslutter et **Eksempel** eller en **Bemerkning** |

# Register