

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1020 — Matematikk og bærekraftig forvaltning

Eksamensdag: Mandag 10. juni, 2024

Tid for eksamen: 15.00 – 19.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle oppgaver teller likt i vurderingen.

Oppgave 1

a

Du har installert vindkraft med kapasitet 1MW. I en gitt time produseres det 0,5MWh strøm. Hva er kapasitetsfaktoren for denne timen?

b

Du har installert et solkraftverk med kapasitet 1MW. En dag der sola er oppe 12 timer, finner du ut at du produserer 0,2MWh elektrisitet i hver av disse timene. Hva blir kapasitetsfaktoren for dette *døgnet*?

Oppgave 2

Hvis vi ønsker å installere vindkraftverk på d forskjellige steder i Norge, kan vi betrakte det kvadratiske minimeringsproblemet

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top C \mathbf{w} + (\mathbf{w}^\top \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mu}_E)^2 + \text{Var}(E), \quad \text{gitt} \quad \mathbf{w} \geq 0$$

Hva betyr $\mathbf{w}$, $\hat{\mathbf{r}}$, C , $\hat{\mu}_E$ og $\text{Var}(E)$. Beskriv med ord hva dette minimeringsproblemet løser?

Oppgave 3

Du forvalter en ikke-fornybar ressurs, og skal finne en optimal strategi for å utnytte denne ressursen. Du sikter mot å maksimere nåverdien av din nytte samt overlate noe av ressursen til kommende generasjon. La $\rho \in (0, 1)$ være diskonteringsfaktoren, mens nyttefunksjonen er $L(h) = \sqrt{h}$. Du starter ut

(Fortsettes på side 2.)

med $S(0) = S$, og har muligheter til å høste av ressursen på tidspunktene $t = 0$ og $t = 1$ (det vil si, $T = 2$). Dynamikken til ressursen blir

$$S(1) = S - h(0), \quad S(2) = S(1) - h(1)$$

der $S(t)$ betegner hvor mye av ressursen som er tilgjengelig på tid t , og $h(0)$ og $h(1)$ hvor mye du høster av den. Vi antar $0 \leq h(0) \leq S$ og $0 \leq h(1) \leq S(1)$. Du skal finne en optimal strategi som maksimerer

$$\max_{h(0), h(1)} \sum_{s=0}^1 \rho^s \sqrt{h(s)} + \rho^2 \sqrt{S(2)}.$$

Videre, så er verdifunksjonen på tid $t = 1$ definert som

$$V(1, S) = \max_{h(1)} \rho \sqrt{h(1)} + \rho^2 \sqrt{S(2)}.$$

a

Hva er verdifunksjonen på tidspunkt $t = 2$, altså hva er $V(2, S)$? Hva er verdifunksjonen på tidspunkt $t = 0$, altså hva er $V(0, S)$?

b

Bruk det dynamiske programmeringsprinsippet til å uttrykke $V(1, S)$ ved $V(2, S)$. Fra dette, vis at den optimal strategien $h^*(1)$ på tidspunkt $t = 1$ blir

$$h^*(1) = \frac{S(1)}{1 + \rho^2}.$$

Du trenger ikke å godtgjøre at du har funnet et maksimumspunkt i dine regninger.

c

Fra det du fant over, regn ut $V(1, S)$.

d

Finn $h^*(0)$, den optimale strategien på tid $t = 0$. Du trenger ikke å godtgjøre at du har funnet et maksimumspunkt i dine regninger.

Oppgave 4

Du kan høste fra en fornybar ressurs som regenerer seg med en vekstrate $r > 0$. Hvis du høster $h(t)$ på tid t , vil ressursen endre seg etter regenerering til

$$B(t+1) = (1+r)(B(t) - h(t))$$

der $B(t)$ er bestanden på tiden t . Innhøstingen må tilfredsstille $0 \leq h(t) \leq B(t)$ for alle tidspunkter.

Hvor stor andel kan du høste fra denne bestanden i hver tidsperiode slik at den er i likevekt?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5

a

Skisser den effisiente porteføljefronten i Markowitz' teori for porteføljestyring. Beskriv med ord hva denne fronten forteller oss om forventet avkastning og risiko i investeringer.

b

Tenk deg at du styrer et fond som investerer bredt i markedet. Du bestemmer deg for trekke ut noen av dine investeringer i kull og olje. Bruk den effisiente porteføljefronten til å beskrive hva som vil skje med fondet ditt.

Oppgave 6

I en enkel klimamodell finner vi at energien (det vil si, energi per tid) som stråler inn fra sola er

$$E_{inn} = \pi R^2 S (1 - \alpha)$$

der S er energiflukstettheten fra sola, R er jordas radius og α er albedo-effekten. Jorda stråler ut energi etter hvor varm den er,

$$E_{ut} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \epsilon$$

der T er jordas gjennomsnittstemperatur og ϵ er hvor mye av energiutstrålingen som fanges av drivhusgasser. Her er σ en proporsjonalitetsfaktor, mens både α og ϵ har verdier mellom null og 1.

a

Finn et uttrykk for gjennomsnittstemperaturen T når jorda sender ut like mye energi som den tar inn.

b

Albedo-parameteren α beskriver hvor mye solenergi som reflekteres fra blant annet is. Is har høy albedo (reflekterer mye), mens sjøvann har lav albedo. Hva skjer med gjennomsnittstemperaturen hvis albedo går ned, altså hvis is smelter om til sjøvann?

SLUTT

(Fortsettes på side 4.)