

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN

1 MAT1020, VÅREN 2024

①

a)

$$\frac{\text{Produksjon}}{\text{inblikket kapasitet}} = \frac{0,5}{1} = \underline{\underline{0,5}}$$

b)

$$\frac{\frac{12}{24} \cdot 0,2 + \frac{12}{24} \cdot 0}{1} = \underline{\underline{0,1}}$$

②

$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix}$ angir hvor mye kapasitet som skal innblandes på hvert av de d stedene.

$\hat{r} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \vdots \\ \hat{r}_d \end{bmatrix}$ er forventet kapasitetsfaktorer på hvert av de d stedene.

$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1d} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1d} & c_{2d} & \dots & c_{dd} \end{bmatrix}$ er varians-kovariansmatrisen til kapasitetsfaktorene

$\hat{\mu}_E$ er forventet etterspørsel, mens $\text{Var}(E)$ er variansen til etterspørselen.

$w^T C w$ er produksjonsvariansen mens $w^T \hat{r}$ er forventet produksjon. Vi søker å finne den beste innstillingen w som minimerer de kvadratiske avvikel mellom produksjon og etterspørsel (fra kompendium). Eventuelt, vi finner den beste innstillingen w som minimerer produksjonsvariansen $w^T C w$ og samtidig minimerer avviket mellom forventet produksjon og etterspørsel (avlet fra solve problemet)

(3)

a) Fra definisjonen er $V(2, S) = p^2 \sqrt{S}$. Fra definisjonen igjen er

$$V(0, S) = \max_{h(0), h(1)} \sum_{s=0}^1 p^s \sqrt{h(s)} + p^2 \sqrt{S(2)}$$

b) Dynamisk programmeringsprinsipp gir

$$\underline{V(1, S) = \max_{h(1)} p \sqrt{h(1)} + V(2, S(2))}$$

Siden $S(2) = S(1) - h(1)$, finner vi at

$$V(1, S) = \max_{h(1)} p \sqrt{h(1)} + V(2, S - h(1))$$

$$= \max_{h(1)} p \sqrt{h(1)} + p^2 \sqrt{S - h(1)}$$

Vi definerer funksjonen $f(x) = p \sqrt{x} + p^2 \sqrt{S - x}$

og maksimerer denne:

$$f'(x) = p \frac{1}{2\sqrt{x}} + p^2 \frac{1}{2\sqrt{S-x}} \cdot (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{p}{\sqrt{S-x}} \Rightarrow x = \frac{1}{p^2} (S-x)$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{\frac{1}{p^2} S}{1 + \frac{1}{p^2}} \Rightarrow x^* = \frac{S}{1 + p^2}$$

Vi ser at $0 < x^* < S$, siden $p > 0$. Dermed
får vi (ett å ha argumentert for at x^* er et
maksimumspunkt, som vi ikke trenger å gjøre),

$$\underline{\underline{h^*(1) = \frac{S(1)}{1 + p^2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad V(1, S) &= p \sqrt{h^*(1)} + p^2 \sqrt{S(2)} = p \sqrt{h^*(1)} + p^2 \sqrt{S - h^*(1)} \\ &\stackrel{S(1)=S}{=} p \sqrt{\frac{S}{1+p^2}} + p^2 \sqrt{S - \frac{S}{1+p^2}} = p \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{1+p^2}} + p^2 \sqrt{\frac{(1+p^2)S - S}{1+p^2}} \end{aligned}$$

$$= f \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{1+f^2}} + f^2 \frac{\sqrt{f^2 s}}{\sqrt{1+f^2}} = f \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{1+f^2}} (1+f^2)$$

$$= f \sqrt{1+f^2} \cdot \sqrt{s}$$

d) Dynamisk programming sier at

$$\begin{aligned} V(0, S) &= \max_{h(0)} \sqrt{h(0)} + V(1, \underbrace{S(1)}_{= S-h(0)}) \\ &= \max_{h(0)} \sqrt{h(0)} + f \sqrt{1+f^2} \sqrt{S-h(0)} \end{aligned}$$

Defineres $f(x) = \sqrt{x} + f \sqrt{1+f^2} \sqrt{S-x}$, og maksimer

dermed

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + f \sqrt{1+f^2} \frac{1}{2\sqrt{S-x}} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = f \sqrt{1+f^2} \frac{1}{\sqrt{S-x}} \Rightarrow x = \frac{1}{f^2(1+f^2)} (S-x)$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{\frac{1}{f^2(1+f^2)} S}{1 + \frac{1}{f^2(1+f^2)}} \Rightarrow x^* = \frac{S}{1+f^2+f^4}$$

Vi har at $0 < x^* < S$ siden $f^2 > 0$, og dermed

$$\text{har vi } h^*(0) = \frac{S}{1+f^2+f^4}$$

4

Vi har lichevet når $B(t+1) = B(t)$ for alle t .

Dette betyr

$$B(t) = B(t+1) = (1+r)(B(t)) - h(t)$$

Løser $h(t)$ for denne likningen.

$$B(t) = (1+r)(B(t)) - h(t)$$

$$\Rightarrow r B(t) = (1+r)h(t) \Rightarrow \hat{h}(t) = \frac{r}{1+r} B(t)$$

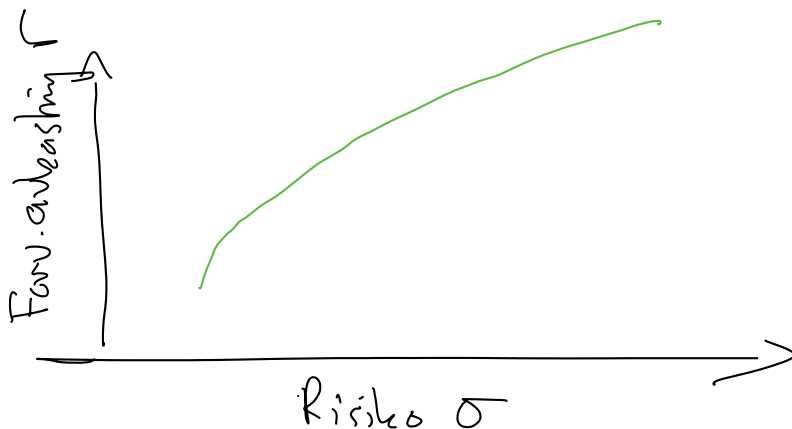
Vi ser at siden $r > 0$, vil $\frac{r}{1+r} \in (0, 1)$, så

$0 < \hat{h}(t) < B(t)$ er en lovlig innhæstingsstrategi.

Vi kan heste andelen $\frac{r}{1+r}$ av bestanden.

5

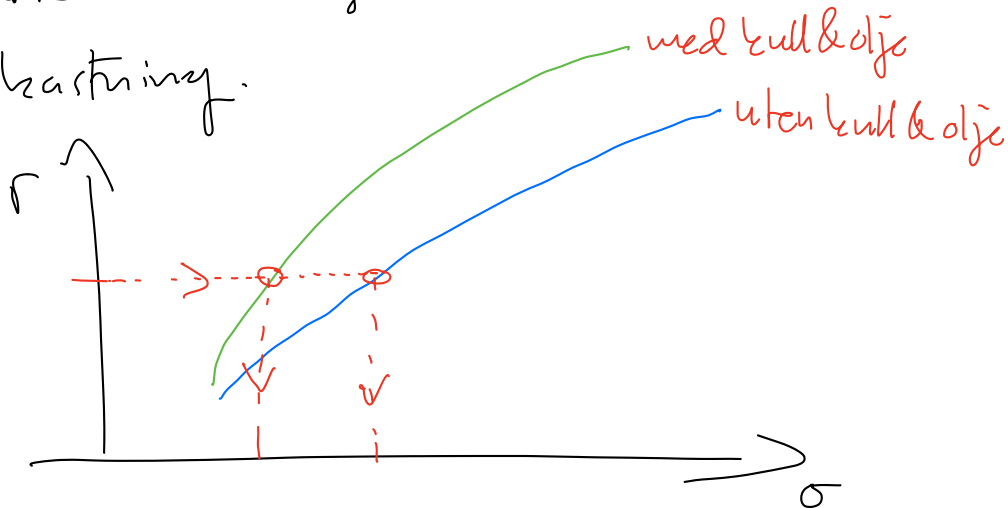
a) Effisient porteføljepunkt



Den effisiente porteføljepunkt beskriver hvordan den best kan investere din penge i markedets verdipapirer for å få høyet forventet avkastning til en gitt

risiko σ , eller, hvordan du kan få lavest risiko σ til en gitt forventet avkastning r .

b) Trekkur du ut olje og kull, investerer du i færre verdipapirer. I følge Markowitz sin teori, vil du da måtte ta en høyere risiko til samme forventede avkastning.



Eventuelt, til en gitt risiko når du akseptere en lavere forventet avkastning.

6

a) $E_{\text{inn}} = E_{\text{ut}}$ når inn og utstråling av energi er like store. $\Rightarrow \cancel{\pi R^2} S(1-\alpha) = 4\cancel{\pi R^2} \sigma T^4 \epsilon$

$$\Rightarrow 4\sigma T^4 \epsilon = S(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow T^4 = \frac{S(1-\alpha)}{4\sigma\epsilon}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = \left(\frac{S(1-\alpha)}{4\sigma\varepsilon} \right)^{1/4}}}$$

b) Hvis albedo går ned, vil $1-\alpha$ gå opp (lavere verdier på α gir høyere verdier på $1-\alpha$). Men hvis $1-\alpha$ blir større, vil telleren i brøken bli større, og dermed også brøken. Dette betyr at gjennomsnittstemperaturen T øker. Hvis is smelter en til sjø vann, vil dette føre til økt temperatur på jorda.