

LØSNINGSFORSLAG TIL OPPGAVEN

17. MARS (...noen utvalgte!)

4

a) Sidebetingelser sier at

$$\text{I } w_1 \hat{r}_1 + w_2 \hat{r}_2 = r$$

$$\text{II } w_1 + w_2 = 1$$

II gir $w_2 = 1 - w_1$. Innsatt i I gir

$$w_1 \hat{r}_1 + (1 - w_1) \hat{r}_2 = r \Leftrightarrow (\hat{r}_1 - \hat{r}_2) w_1 + \hat{r}_2 = r$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{w_1 = \frac{r - \hat{r}_2}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}}}$$

$$\text{Fra II får vi: } w_2 = 1 - w_1 = 1 - \frac{r - \hat{r}_2}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{w_2 = \frac{\hat{r}_1 - r}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}}}$$

Siden vi fra sidebetingelsene har

ett unnl yg val  av w_1 og w_2 , så er det
ingenheng   minimee $\underline{w}^T C \underline{w}$ osv, kun
 $w_1 = \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}$ og $w_2 = \frac{\hat{r}_1 - r}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}$.

Risikoen blir

$$\underline{w}^T C \underline{w} = [w_1 \ w_2] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$= c_{11} w_1^2 + 2 c_{12} w_1 w_2 + c_{22} w_2^2$$

$$= c_{11} \left(\frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2} \right)^2 + 2 c_{12} \left(\frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2} \right) \left(\frac{\hat{r}_1 - r}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2} \right) + c_{22} \left(\frac{\hat{r}_1 - r}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2} \right)^2$$

$$= \dots \text{pynt litt selv!}$$

b) Med $d=3$ vil sidebetingelsene bli

$$\text{I} \quad w_1 \hat{r}_1 + w_2 \hat{r}_2 + w_3 \hat{r}_3 = r$$

$$\text{II} \quad w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

II gir $w_3 = 1 - w_1 - w_2$. Innsatt i I finner

vi

$$w_1 \hat{r}_1 + w_2 \hat{r}_2 + (1 - w_1 - w_2) \hat{r}_3 = r$$

$$\Rightarrow w_2 (\hat{r}_2 - \hat{r}_3) = \hat{r} - \hat{r}_3 - w_1 (\hat{r}_1 - \hat{r}_3)$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{\hat{r} - \hat{r}_3}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3} - w_1 \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_3}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3}$$

Setter vi uttrykket for w_2 inn i $w_3 = 1 - w_1 - w_2$

finner vi

$$\begin{aligned} w_3 &= 1 - w_1 - \left(\frac{\hat{r} - \hat{r}_3}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3} - w_1 \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_3}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3} \right) \\ &= \frac{\hat{r}_2 - \hat{r}}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3} + w_1 \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3} \end{aligned}$$

For dette konkluderer vi at både w_2 og w_3 er bestemt av w_1 . Markowitz' optimeringsproblem blir derfor en minimering av uttrykket $\underline{w}^T C \underline{w}$ over leen w_1 for $d=3$.

Merk at

$$[w_1 \ w_2 \ w_3] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \omega_1^2 C_{11} + 2\omega_1\omega_2 C_{12} + \omega_2^2 C_{22} + 2\omega_1\omega_3 C_{13} + \\ + 2\omega_2\omega_3 C_{23} + \omega_3^2 C_{33}.$$

Settes inn sidebetingningene, som gir (se over!)

$$\omega_2 = \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_3}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3} - \omega_1 \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_3}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3}, \quad \omega_3 = \frac{\hat{r}_2 - \hat{r}_1}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3} + \omega_1 \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_3}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3}$$

$\quad \quad \quad := a \quad \quad \quad := b \quad \quad \quad := \alpha \quad \quad \quad := \beta$

$$= \omega_1^2 C_{11} + 2\omega_1(a - b\omega_1)C_{12} + (a - b\omega_1)^2 C_{22} + \\ + 2\omega_1(\alpha + \beta\omega_1)C_{13} + 2(a - b\omega_1)(\alpha + \beta\omega_1)C_{23} + (\alpha + \beta\omega_1)^2 C_{33}$$

Derfor vil (for $d=3$!)

$$\min_{\omega} \underline{\omega}^T \underline{C} \underline{\omega}, \text{ slik at } \underline{\omega}^T \underline{\hat{r}} = r \text{ og } \underline{\omega}^T \underline{1} = 1$$

bli

$$\min_{\omega_1} \omega_1^2 C_{11} + 2\omega_1(a - b\omega_1)C_{12} + (a - b\omega_1)^2 C_{22} \\ + 2\omega_1(\alpha + \beta\omega_1)C_{13} + 2(a - b\omega_1)(\alpha + \beta\omega_1)C_{23} + (\alpha + \beta\omega_1)^2 C_{33}$$

For å finne minimum kan vi nå se på

funksjonen

$$f(x) = x^2 c_{11} + 2x(a-bx)c_{12} + (a-bx)^2 c_{22} + 2x(\alpha+\beta x)c_{13} \\ + 2(a-bx)(\alpha+\beta x)c_{23} + (\alpha+\beta x)^2 c_{33}$$

cy sette dens deriverte til 0:

$$f'(x) = 2c_{11}x + 2(a-2bx)c_{12} + 2(a-bx)(-\beta)c_{22} \\ + 2(\alpha+2\beta x)c_{13} + 2(a\beta - \alpha b - 2b\beta x)c_{23} \\ + 2(\alpha+\beta x)\beta c_{33} = 0$$

Derivér på 2, cy samler x;

$$(c_{11} - 2bc_{12} + b^2c_{22} + 2\beta c_{13} - 2b\beta c_{23} + \beta^2c_{33})x \\ + a c_{12} - b a c_{22} + \alpha c_{13} + (a\beta - \alpha b)c_{23} + \alpha\beta c_{33} = 0$$

Som gir

$$\underline{\underline{\omega_1 = x = \frac{a c_{12} - b a c_{22} + \alpha c_{13} + (a\beta - \alpha b)c_{23} + \alpha\beta c_{33}}{c_{11} - 2bc_{12} + b^2c_{22} + 2\beta c_{13} - 2b\beta c_{23} + \beta^2c_{33}}}}}$$

Kan vi sette inn for a, b, α, β . Videre, så kan vi sette inn derne ω_1 i uttrykkene for ω_2 og

w_3 for a bank where used optimal addressing
i tilfellet $d=3$!

5

$$a) \mu(500.000) = \sqrt{500.000} \approx 707$$

$$\mu(750.000) = \sqrt{750.000} \approx 866$$

$$\mu(1.000.000) = \sqrt{1.000.000} = 1000$$

b) 10% lønnsøkning for hver

$$\mu(500.000 + 50.000) = \sqrt{550.000} \approx \underline{\underline{742}}$$

$$\% \text{-økning i nytte: } \frac{742 - 707}{707} \approx 0,0488 \approx \underline{\underline{4,9\%}}$$

$$\mu(750.000 + 75.000) = \sqrt{825.000} = \underline{\underline{908}}$$

$$\% \text{-økning i nytte: } \frac{908 - 866}{866} \approx 0,0488 \approx \underline{\underline{4,9\%}}$$

$$\mu(1.000.000 + 100.000) = \sqrt{1.100.000} \approx \underline{\underline{1049}}$$

$$\% \text{-økning i nytte: } \frac{1049 - 1000}{1000} \approx 0,049 \approx \underline{\underline{4,9\%}}$$

Er det en tilfældighed at vi får samme marginale %-økning i nytte?

Hvis du har lænn x , og du øger denne med en %-økning p , har du $x + \frac{p}{100} \cdot x$ i lænn efter $\frac{p}{100}$ %:

$$\begin{aligned}\frac{u(x + \frac{p}{100} \cdot x) - u(x)}{u(x)} &= \frac{\sqrt{x + \frac{p}{100} \cdot x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\&= \frac{\sqrt{(1 + \frac{p}{100})x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{1 + \frac{p}{100}} - 1)\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}} \\&= \sqrt{1 + \frac{p}{100}} - 1\end{aligned}$$

Uanset lænn, vil nytten øge lige meget i % når de får et %-tillegg.

c) Fakt lænnetillegg:

$$u(500.000 + 75.000) = \sqrt{575.000} \approx \underline{\underline{758}}$$

$$\% \text{-økning} : \frac{758 - 707}{707} = 0,072 = \underline{\underline{7,2\%}}$$

$$U(750.000 + 75.000) = \underline{908}, \text{ og } \% \text{-økning} = \underline{4,9\%}$$

(se b) over)

$$U(1.000.000 + 75.000) = \sqrt{1.075.000} = \underline{1037}$$

$$\% \text{-økning: } \frac{1037 - 1000}{1000} = 0,037 = \underline{3,7\%}$$

Merk at med dette lønnetillegg vil nytten til den som tjener minst løn med neste dobbelt så mye som nytten til den som tjener mest.

d) Gjør selv. Men merk at med %-tillegg på lønna øker nytten %-vis lite. Men vi får litt andre tall og %-er enn i c). Med lønnetillegg får vi også andre verdier enn i c). Hva vi får i nytte, og hvor mye ekstra "glede" vi får av lønsøkning, avhenger av hva slags nyttefunksjon vi har.

Nyttefunksjoner, er de nyttige? Gruble litt på det!

3

Finner y^T :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, & a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, & a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 \end{bmatrix}$$

Derfor er $y^T = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]$ med

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$$

$$y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$$

$$y_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4$$

$$y_4 = a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4$$

Videre, vil dermed

$$y = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 \end{bmatrix}$$

Formel 2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{bmatrix} = z$$

Vi ser at $z = y$!

2

a) Vi finder mindst muligt rårbe når

$$r_0 = \frac{a}{c}, \text{ så den der bliver ledet } \frac{(r - \frac{a}{c})^2}{c^{-2}(b^2 - a^2)} = 0$$

$$\underline{r_0} = \frac{a}{c} = \frac{2,2}{44} = \underline{\underline{0,05}} \quad (r_0 = 5\%)$$

Når $r_0 = \frac{a}{c}$, finder vi at den tilhørende rårbe bliver

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{44} \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_0 = 0,15}}, \text{ eller } 15\%$$

b) Hvis $r = 0,1$, hvor vi at

$$\frac{\sigma^2}{(1/44)} - \frac{(0,1 - \frac{2,2}{44})^2}{(\frac{1}{44})^2 (0,1472 \cdot 44 - 2,2^2)} = 1$$

$$= \frac{(0,1 - 0,05)^2}{\frac{0,1472}{44} - 0,05^2} = \frac{0,05^2}{0,000845} = \underline{2,96}$$

$$\frac{\sigma^2}{(1/44)} = 1 + 2,96 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{3,96}{44} = 0,09$$

$$\underline{\underline{\sigma = 0,3}}$$

For a oppnå 10% forventet avkastning,
må vi ta en risiko på 30%

c) Vi tar en risiko på $\sigma = 0,4$, dvs 40%. Høyest
mulig forventet avkastning blir da

$$\frac{0,4^2}{(1/44)} - \frac{(r - 0,05)^2}{0,000845} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(r - 0,05)^2}{0,00545} = 7,04 - 1 = 6,04$$

$$\Rightarrow (r - 0,05)^2 = 0,0051$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{r}} = 0,05 + \sqrt{0,0051}$$

$$= \underline{\underline{0,12}}.$$

Du kan forvente 12% avkastning til 40% risiko, hvis du investerer i Markowitz-portefølsen.

Oppgavene 6 og 7 er gjennomgått på forelesninger.

Alle oppfordres til å gjøre oppgave 1, som sier noe om hva risiko betyr.