

LØSNINGSFORSLAG TIL OPPGAVER

3. APRIL

①

Er gjort på forelesning

③

Nyttefunksjonen er $L(h) = h^{1/4}$.

Vi finner at $V(3, B) = f^3 B^{1/4}$

Dynamic programmingprinsipp (DPP) :

$$V(2, B) = \max_{0 \leq h(2) \leq B} f^2 h(2)^{1/4} + \underbrace{V(3, B-h(2))}_{1/4}$$

$$= f^3 B^{1/4} = f^3 (R(B) - h(2))^{1/4}$$

$$= f^3 R^{1/4} (B - h(2))^{1/4}$$

$$= \max_{0 \leq h(2) \leq B} f^2 h(2)^{1/4} + f^3 R^{1/4} (B - h(2))^{1/4}$$

Introducerer funktionen

$$f(x) = g^2 x^{1/4} + g^3 R^{1/4} (B-x)^{1/4}$$

Finder maksimum av denne:

$$f'(x) = g^2 \frac{1}{4} x^{-3/4} + g^3 R^{1/4} \cdot \frac{1}{4} (B-x)^{-3/4} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow x^{-3/4} = g R^{1/4} (B-x)^{-3/4} \quad \bigg| \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x = (g R^{1/4})^{(-\frac{4}{3})} (B-x)$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{B}{1 + (g^4 R)^{1/3}}$$

Vi kan vise at $f''(x^*) < 0$ (sjekk selv!), og

dermed er x^* et maksimumspunkt. Siden $0 < x^* < B$, har vi funnet at

$$h(2) = \frac{B(2)}{1 + (g^4 R)^{1/3}}$$

$$\text{Definer } k = (g^4 R)^{1/3}$$

V i regner ut $V(2, B)$:

$$\begin{aligned}
 V(2, B) &= f^2 h^*(2)^{1/4} + f^3 R^{1/4} (B - h^*(2))^{1/4} \\
 &= f^2 \left(\frac{B}{1+k} \right)^{1/4} + f^3 R^{1/4} \left(B - \frac{B}{1+k} \right)^{1/4} \\
 &\quad = \frac{(1+k)B}{1+k} - \frac{B}{1+k} = \frac{k}{1+k} B \\
 &= f^2 \frac{B^{1/4}}{(1+k)^{1/4}} + f^3 R^{1/4} \frac{k^{1/4}}{(1+k)^{1/4}} B^{1/4} \\
 &= f^2 \frac{B^{1/4}}{(1+k)^{1/4}} \left(1 + f R^{1/4} k^{1/4} \right) \\
 &\quad = (f^4 R)^{1/4} \left(\underbrace{(f^4 R)^{1/3}}_{=k} \right)^3 \frac{1}{4} = k^{\frac{3}{4}} \\
 &= f^2 \frac{B^{1/4}}{(1+k)^{1/4}} (1+k) \\
 &= f^2 (1+k)^{\frac{3}{4}} B^{1/4}
 \end{aligned}$$

Finnes $h(1)$ ved DPP :

$$\begin{aligned}
 V(1, B) &= \max_{0 \leq h(1) \leq B} f h(1)^{1/4} + V(2, B(2)) \\
 &\quad = R(B(1) - h(1)) = R(B - h(1))
 \end{aligned}$$

$$= \max_{0 \leq h(1) \leq B} f^{1/4} h(1) + f^2 (1+k)^{3/4} (R(B-h(1)))^{1/4}$$

$$= \max_{0 \leq h(1) \leq B} f^{1/4} h(1) + f^2 (1+k)^{3/4} R^{1/4} (B-h(1))^{1/4}$$

Definerer funksjonen

$$f(x) = f^{1/4} x^{3/4} + f^2 (1+k)^{3/4} R^{1/4} (B-x)^{1/4}$$

Finner maksimum:

$$f'(x) = f^{1/4} x^{-1/4} + f^2 (1+k)^{3/4} R^{1/4} (-1/4) (B-x)^{-3/4} = 0$$

Etter litt regning, tilsvarende sum over, finner vi

$$x^* = \frac{B}{1 + (f^4 (1+k)^3 R)^{1/3}} = \frac{B}{1+k+k^2}$$

Kan vise at $f'(x^*) < 0$, og vi ser at

$$0 < x^* < B.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{h^*(1) = \frac{B(1)}{1+k+k^2}}}$$

Husk at

$$k = (f^4 R)^{1/3}$$

Representer $V(1, B)$:

$$\begin{aligned}
 \underline{V(1, B)} &= f h^x(1) + f^2 (1+k)^{3/4} \cdot R^{1/4} (B - h^x(1))^{1/4} \\
 &= f \frac{B^{1/4}}{(1+k+k^2)^{1/4}} + f^2 (1+k)^{3/4} R^{1/4} \left(\frac{1+k+k^2}{1+k+k^2} B - \frac{1}{1+k+k^2} B \right)^{1/4} \\
 &= f \frac{B^{1/4}}{(1+k+k^2)^{1/4}} \left(1 + f (1+k)^{3/4} R^{1/4} \frac{1}{1+k+k^2} \right) = \frac{k+k^2}{1+k+k^2} B \\
 &= (1+k) k^{1/4} f R^{1/4} = (1+k) k^{1/4} (f R)^{1/4} = (1+k) k^{1/4} k^{3/4} \\
 &= k(1+k) \\
 &= f \frac{B^{1/4}}{(1+k+k^2)^{1/4}} (1+k+k^2) \\
 &= f (1+k+k^2)^{3/4} B^{1/4}
 \end{aligned}$$

Vi finner så $h^x(0)$ ved DPO:

$$\begin{aligned}
 V(0, B) &= \max_{0 \leq h(0) \leq B} h(0)^{1/4} + V(1, B(1)) \\
 &= \max_{0 \leq h(0) \leq B} h(0)^{1/4} + f (1+k+k^2)^{3/4} \cdot R^{1/4} (B - h(0))^{1/4}
 \end{aligned}$$

Definer funksjonen

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} + g(1+k+k^2)^{\frac{3}{4}} R^{\frac{1}{4}} (B-x)^{\frac{1}{4}}$$

Finnes maksimum

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} + g(1+k+k^2)^{\frac{3}{4}} R^{\frac{1}{4}} (B-x)^{-\frac{3}{4}} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x^* = \frac{B}{1+k+k^2+k^3}}}$$

Vi kan vise at $f''(x^*) < 0$, og $0 < x^* < B$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{h(k) = \frac{B}{1+k+k^2+k^3}}}$$

Vi trenger ikke å regne ut $V(0, B)$, siden vi nå har funnet alle innhastingene $h^*(0)$, $h^*(1)$ og $h^*(2)$.

La oss regne ut bestanden $B(3)$ hvis vi har et optimalt:

$$\begin{aligned} B(1) &= R(B - h^*(0)) = R\left(B - \frac{B}{1+k+k^2+k^3}\right) \\ &= R \underbrace{\frac{k(1+k+k^2)}{1+k+k^2+k^3}} B \end{aligned}$$

$$B(2) = R(B(1) - h^* i(1)) = R(B(1) - \frac{B(1)}{1+k+k^2})$$

$$= R \frac{k(1+k)}{1+k+k^2} B(1)$$

$$= R \frac{k(1+k)}{1+k+k^2} \cdot R \frac{k(1+k+k^2)}{1+k+k^2+k^3} B$$

$$= R^2 \frac{k^2(1+k)}{1+k+k^2+k^3} B$$

$$B(3) = R(B(2) - h^* i(2)) = R(B(2) - \frac{B(2)}{1+k})$$

$$= R \frac{k}{1+k} B(2)$$

$$= R \frac{k}{1+k} \cdot R^2 \frac{k^2(1+k)}{1+k+k^2+k^3} B$$

$$= R^3 \frac{k^3}{1+k+k^2+k^3} B$$

Vi setter nå inn verdiene $B=100$, $g=\frac{1}{1.05}$ og

$R=1.1$ og analyser hvordan vi optimalt

forvalter den prøybare verdien (trossen) med

nyttefunksjonen $L(h) = h^{1/4}$

$$k = (f^4 R)^{1/3} = \left(\left(\frac{1}{1,05} \right)^4 \cdot 1,1 \right)^{1/3} \simeq \underline{\underline{0,9673}}$$

Startes med $B(0) = B = 100$.

Hvert optimalt av bestanden:

$$\underline{\underline{h^*(0)}} = \frac{100}{1+k+k^2+k^3} = \underline{\underline{26,3}}$$

Vi får 26,3 fisker for bestanden på 100, litt mer enn med kvadratt-nytte.

Regenerering:

$$\underline{\underline{B(1)}} = 1,1 \cdot (100 - 26,3) \simeq \underline{\underline{81,1}}$$

Hvert optimalt av dette:

$$\underline{\underline{h^*(1)}} = \frac{81,1}{1+k+k^2} = \underline{\underline{27,9}}$$

Vi får 27,9 fisker for bestanden på 81,1 fisker, fortsatt litt mer enn med kvadratt-nytte.

Regenerering

$$\underline{B(2)} = 1,1 \cdot (81,1 - 27,9) = \underline{58,5}$$

Hvæst optimalt for denne:

$$L^*(2) = \frac{58,5}{1+2} = 29,7$$

Vi får 29,7 pik for betænder på 58,5, som er lidt færre pik end med kvadratisk nytte.

Regenerering

$$\underline{B(3)} = 1,1 \cdot (58,5 - 29,7) = \underline{31,7}$$

Vi overskæder 31,7 pik, som er lidt færre end det vi får med kvadratisk nytte.

Nyttefunktionen påvirker hvordan vi optimalt skal heste og overskæder til næste generation.

4

Løser optimeringsproblemet med DPP:

Først, for definisjonen av verdifunksjonen til dette optimeringsproblemet:

$$V(2, S) = p^2 S^r$$

$$V(1, S) = \max_{0 \leq h(1) \leq S} p h(1)^r + p^2 S(2)^r$$

$$V(0, S) = \max_{\substack{0 \leq h(0) \leq S \\ 0 \leq h(1) \leq S(1)}} \sum_{s=0}^1 p^s h(s)^r + p^2 S(2)^r$$

Vi finner først $h(1)$ ved bruk av DPP:

$$V(1, S) = \max_{0 \leq h(1) \leq S} p h(1)^r + \underbrace{V(2, S(2))}_{= S - h(1)}$$

$$= \max_{0 \leq h(1) \leq S} p h(1)^r + p^2 (S - h(1))^r$$

Definer

$$f(x) = p x^r + p^2 (S - x)^r$$

og maksimerer denne:

$$f'(x) = f^{\gamma} x^{\gamma-1} + f^2 \gamma (5-x)^{\gamma-1} \cdot (-1) = 0$$

$$\Rightarrow x^{\gamma-1} = f (5-x)^{\gamma-1} \quad \left| \cdot \frac{1}{\gamma-1} \right.$$

$$\Rightarrow x = f^{\frac{1}{\gamma-1}} (5-x)$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{f}{1 + f^{\frac{1}{1-\gamma}}}$$

Kan vise at $f''(x^*) < 0$ (vi, dette selv!)

Videre er $0 < x^* < 5$ siden $f^{\frac{1}{1-\gamma}} > 0$.

Dermed blir

$$h^*(1) = \frac{f(1)}{1 + f^{\frac{1}{1-\gamma}}}$$

$\rightarrow k = f^{\frac{1}{1-\gamma}}$
for å gjøre
utregningene.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{V(1,5)}} &= f h^*(1)^{\gamma} + f^2 (5 - h^*(1))^{\gamma} \\ &= f \left(\frac{f}{1+k} \right)^{\gamma} + f^2 \left(5 - \frac{f}{1+k} \right)^{\gamma} \\ &= f \frac{f^{\gamma}}{(1+k)^{\gamma}} + f^2 \frac{k^{\gamma}}{(1+k)^{\gamma}} 5^{\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f \frac{S^r}{(1+k)^r} \underbrace{\left(1 + f k^r\right)} \\
 &= 1 + f \left(f^{\frac{1}{1-r}}\right)^r = 1 + f \cdot f^{\frac{r}{1-r}} = 1 + f^{1 + \frac{r}{1-r}} \\
 &= 1 + f^{\frac{1}{1-r}} = 1 + k
 \end{aligned}$$

$$= f \frac{S^r}{(1+k)^r} \cdot (1+k) = \underline{\underline{f (1+k)^{1-r} S^r}}$$

Finden $h^*(v)$ ved DPP:

$$V(v, S) = \max_{0 \leq h(v) \leq S} \left(h(v)^r + V(1, S(1)) \right)$$

$$= \max_{0 \leq h(v) \leq S} h(v)^r + f (1+k)^{1-r} \cdot (S - h(v))^r$$

Definieren

$$f(x) = x^r + f (1+k)^{1-r} (S-x)^r$$

$$f'(x) = r x^{r-1} + f (1+k)^{1-r} r (S-x)^{r-1} (-1) = 0$$

$$\dots \Rightarrow x^* = \frac{S}{1+k(1+k)}$$

Kan vise at $f''(x^*) < 0$, og siden $k > 0$ vil
 $0 < x^* < S$ (vi deler S på $1 + \underbrace{k(1+k)}_{>0} > 1$),
 $\Rightarrow h^*(k) = \frac{S}{1+k+k^2}$

Vi trenger ikke å regne ut hva $V(k, s)$ er siden
 vi nå har funnet $h^*(k)$ og $h^*(1)$.

Beregner $S(1)$ og $S(2)$ når vi pumper optimalt:

$$\begin{aligned} S(2) &= S(1) - h^*(1) = S(1) - \frac{S(1)}{1+k} \\ \Rightarrow &= \frac{k}{1+k} S(1) = \frac{k}{k+1} \underbrace{\left(S(1) - h^*(1) \right)}_{= S} \\ &= \frac{k}{k+1} \left(S - \frac{S}{1+k+k^2} \right) \\ &= \frac{k}{k+1} \frac{k+k^2}{1+k+k^2} S \quad \text{ } k+k^2 = k(k+1) \\ &= \frac{k^2}{1+k+k^2} \cdot S \end{aligned}$$

$k = \sqrt{\frac{1}{1-x}}$

Anta nå at vi ikke veddiskonterer. Dette betyr at $\rho = 1$. For oss ser vi da at ($k = \rho^{\frac{1}{1-\rho}} = 1^{\frac{1}{1-\rho}} = 1$)

$$\underline{h^*(1)} = \frac{S(1)}{1+1} = \underline{\frac{1}{2} S(1)}$$

$$\underline{h^*(1)} = \frac{S}{1+1+1} = \underline{\frac{1}{3} S}$$

(evt, gjør optimeringen på nytt med opp!)

$$\underline{S(2)} = S(1) - h^*(1) = S(1) - \frac{1}{2} S(1) = \frac{1}{2} S(1)$$

$$= \frac{1}{2} (S - h^*(2)) = \frac{1}{2} (S - \frac{1}{3} S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} S = \underline{\underline{\frac{1}{3} S}}$$

Hvis vi ikke veddiskonterer, sparer vi $\frac{1}{3} S$ til

fremtiden (evt, vi lar $\frac{1}{3} S$ av dyen ligge igjen),

mens med diskontering lar vi $\frac{k^2}{1+k+k^2} S$ ligge

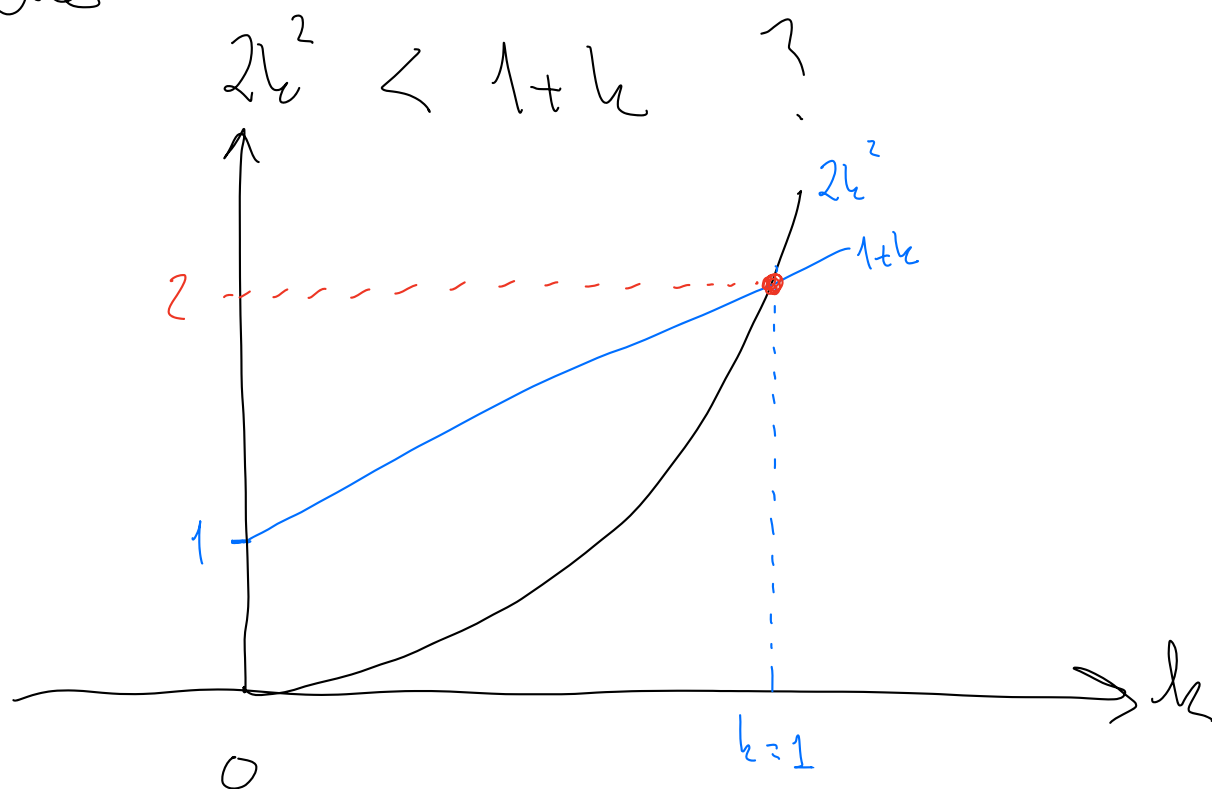
igjen. Hvis vi ikke diskonterer, sparer vi mer?

Altså, stemmer det at $\frac{k^2}{1+k+k^2} S < \frac{1}{3} S$?

Dette er det samme som å spørre om

$$3k^2 < 1+k+k^2 \quad ?$$

eller



Frå grafen over ser vi at hvis $h \in [0, 1)$, vil $2h^2 < 1+h$. Men $h = g^{\frac{1}{1-r}}$, og sålænge vi veddiskutterer vil $g < 1$. Siden $0 < g < 1$, vil $\frac{1}{1-r} > 1$, og $g^{\frac{1}{1-r}} < 1$ (la $r = \frac{1}{2}$, og $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$!)

Med andre ord, $2h^2 < 1+h$, eller

$$\frac{h^2}{1+h+h^2} S < \frac{1}{3} S$$

Med veddiskutning vedstår vi altså mer det vi kan ha nå enn det som avløber til

rentiden. Evt, hvis vi ikke ved direkte
vil vi la mer olje ligge igjen.

2

Fra oppg 1 vet vi at

$$h^*(0) = \frac{B}{1 + \rho^2 R + \rho^4 R^2 + \rho^6 R^3}$$

$$B = 100 \text{ og } \rho^2 R = \frac{1,1}{(1,05)^2} \approx 0,9977$$

Derved vil

$$h^*(0) = \frac{100}{3,986} \approx \underline{\underline{25,1}}. \text{ Herfor ser for}$$

litt mer 25 tårer til 0 bygning med.

Regenerering

$$\underline{B(1)} = 1,1 (100 - 25,1) = \underline{\underline{82,4}}$$

På tid 1 heter vi:

$$\underline{h^*(1)} = \frac{B(1)}{1 + \rho^2 R + \rho^4 R^2} = \frac{82,4}{1 + 0,9977 + 0,9977^2} \approx \underline{\underline{27,5}}$$

V; hæter 27,5 krab for betanden på 82,4.

Regenerering

$$\underline{B(2)} = 1,1 (82,4 - 27,5) = \underline{60,4}$$

På til 2 hæter vi :

$$\underline{h^*(2)} = \frac{B(2)}{1 + f^2 R} = \frac{60,4}{1 + 0,9977} \approx \underline{30,2}$$

V; hæter 30,2 krab for betanden på 60,4.

$$\text{Dette gir } \underline{B(3)} = 1,1 (60,4 - 30,2) \approx \underline{33,2}$$

antall fik til neste generasjon.

Merke at vi har en annen innhæstingsstrategi med V_h -nytte enn med $h^{1/4}$ -nytte (som i oppg. 3!)