

LØSNINGER KORTE VÅR 2024 | MAT1620

(AUGUST, 2024)

1

a) Peak hour er den beste tiden i døgnet, altså den tiden med mest sol og dermed høyest produksjon. Tømmene for soloppgang og til peak hour vil ha lavere kapasitetsfaktor, som de etter og frem til solnedgang. På natten er det ingen produksjon for sol.

En mulig måte å anslå daglig kapasitetsfaktor er å anta at soltimene har halvparten av peak hour kapasitetsfaktor, i snitt. Tenker vi at det er 12 timer med natt, får vi

$$C_{\text{dag}} = \frac{12 \cdot \frac{1}{2} C_{ph} + 12 \cdot 0}{24} = \frac{1}{4} C_{ph}$$

C_{ph} = peak
hour kap.faktor

Det finnes andre mulige antag.

b) Produksjonen for vind og solpark er

$$c_v \cdot V + c_s \cdot S \quad (\text{MWh})$$

sum skal matche efterspørgslen P MWh.

Dette gir at

$$c_v \cdot V + c_s \cdot S = P$$

eller

$$S = \frac{P - c_v V}{c_s}$$

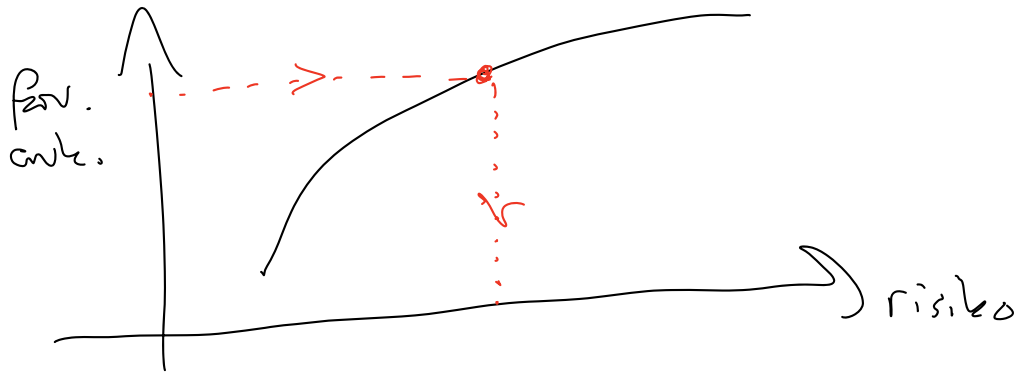
Det må antages her at $c_v V < P$.

Kapasitetsfølelser for vind og sol vil ændre sig dag for dag, siden vinden ændrer sig og skyer påvirker sol. Vi vil derfor ha dage med høj produktion, og dage med lav produktion, og mest sandsynlig vil $P \neq c_v V + c_s S$.

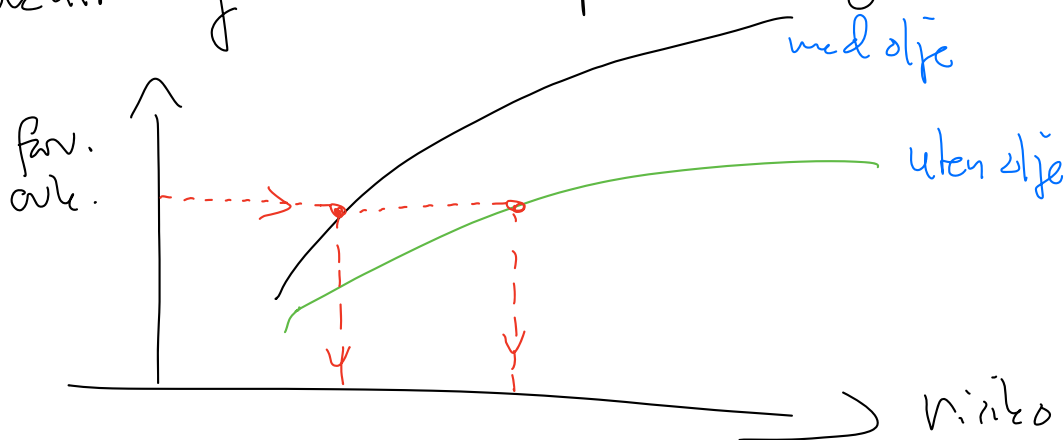
(2)

Fra Markowitz' porteføljetæori har vi den effisiente porteføljepunkter som angiver

den bedste kombinationen af forventet afkastning og risiko. Vi tænker oss at fundet værd er investeret bredt i markedet, slik at til den endeste afkastningen har det mindst risiko



For vi vedes olje, vil vi ikke være investert i hele markedet, og Markowitz sier oss at til samme afkastning må vi akseptere en høyere risiko



Risikoen øker, hvis vi ender samme forventede afkastning. Men dette betyr at vi får det sannsynlighet for å avvike mye fra forventet afkastning, noe som betyr at vi øker usikkerheten for å tjene mye. (men også øker

muligheder for at købe mere....)

3

a) $\underline{w}$ er vektoren af indkøbt kapacitet,
 $\underline{w} = (w_1, \dots, w_d)^T$, der vi har d lokasjoner.
 C er varians-kovariansmatricen til kapacitets-
følelsene i de d lokasjoner. $d \times d$ matric.

$\hat{\underline{r}}$ er vektoren af forventede kapacitetsfølelser i
de d lokasjoner

$\hat{\mu}_E$ er forventet efterspørgsel.

$\text{Var}(E)$ er variansen til efterspørgslen.

$\underline{w} \geq 0$ siden vi naturligvis ikke kan bygge negative kraftværk!

b) Vi finder optimum af $L(\underline{w})$ ved at sætte

$$\nabla L(\underline{w}) = 0 \Rightarrow 2C\underline{w} + 2(\underline{w}^T \hat{\underline{r}} - \hat{\mu}_E) \hat{\underline{r}} = 0$$

$$\Rightarrow C\underline{w} + (\underline{w}^T \hat{\underline{r}}) \hat{\underline{r}} = \hat{\mu}_E \hat{\underline{r}}$$

Vi vet at $(\underline{w}^T \hat{\underline{r}}) = (\underline{w}^T \hat{\underline{r}})^T$ siden $\underline{w}^T \hat{\underline{r}}$ er et
tal. Men $(\underline{w}^T \hat{\underline{r}})^T = \hat{\underline{r}}^T \underline{w}^T = \hat{\underline{r}}^T \underline{w}$

$$\text{Vi dere er } (\underline{w}^T \hat{\underline{r}}) \hat{\underline{r}} = \hat{\underline{r}} (\underline{w}^T \hat{\underline{r}}) = \hat{\underline{r}} \hat{\underline{r}}^T \underline{w}$$

$$\Rightarrow (C + \hat{\underline{r}} \hat{\underline{r}}^T) \underline{w} = \hat{\mu}_E \hat{\underline{r}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\underline{\hat{w}} = \hat{\mu}_E (C + \hat{r} \hat{r}^T)^{-1} \hat{r}}}}$$

4 Vi har et sikk at $B(t+1) = (1+d)B(t)$,

Alt B_0

$$(1+d)B(t) = B(t+1) = (1+r)(B(t) - h(t))$$

$\Downarrow$

$$(1+d)B(t) = (1+r)B(t) - (1+r)h(t)$$

$\Downarrow$

$$(1+r)h(t) = (1+r - (1+d))B(t) = (r-d)B(t)$$

$$\underline{\underline{h(t) = \frac{r-d}{1+r} B(t)}}$$

$r-d > 0$, $\text{og } 1+r > r$, som dermed også betyr at $1+r > r-d$. Dette gir $\frac{r-d}{1+r} < 1$, og vi finner

$$0 < \frac{r-d}{1+r} B(t) < B(t)$$

som inneer. $\underline{\underline{h(t) = \frac{r-d}{1+r} B(t)}}$

5

a) Hvis $E_{inn} > E_{ut}$, vil det stråle mer energi inn til jorda enn den stråler ut, og jordas gj.snitts-temperatur øker

Likvelet oppnås vi når $E_{inn} = E_{ut}$.

I dette tilfellet vil

$$\pi R^2 S(1-\alpha) = 4\pi R^2 \sigma T^4 \epsilon$$

eller $4\sigma\epsilon T^4 = S(1-\alpha)$

eller
$$T = \left(\frac{S(1-\alpha)}{4\sigma\epsilon} \right)^{1/4}$$

b) Vi har

$$T'(t) = k (\pi R^2 S(1-\alpha) - 4\pi R^2 \sigma T(t)^4 \epsilon)$$

der vi antar $T(0)$ kjent. Dette er en differensiallikning som vi løste i en av lekseoppgavene;

$$T'(t) = \underbrace{k\pi R^2 S(1-\alpha)}_{=:a} - \underbrace{k4\pi R^2 \sigma \epsilon}_{=:b} \cdot T(t)^4$$

$$(*) \quad T'(t) = a - bT(t).$$

Vi har opgitt at $T(t) = T_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})$

sjekker at denne tilfredsstiller (*):

$$\begin{aligned} T'(t) &= T_0 (-b) e^{-bt} + \frac{a}{b} (-1) (-b) e^{-bt} \\ &= -b T_0 e^{-bt} + a e^{-bt} \\ &= T(t) - \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) \end{aligned}$$

$$= -b \left(T(t) - \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) \right) + a e^{-bt}$$

$$= -bT(t) + a(1 - e^{-bt}) + a e^{-bt}$$

$$= a - bT(t) \quad \text{ok!}$$

Se også at $T(0) = T_0 e^0 + \frac{a}{b}(1 - e^0) = T_0$,
slik som det skal være.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} T_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) = \frac{a}{b}$$

siden $b > 0$ og $e^{-bt} \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$.

6

Vi innfører først verdifunksjoner for å kunne
bruke det dynamiske programmeringsprinsippet (DPP)

$$V(0, B) = \max_{h(0), h(1)} \sqrt{h(0)} + \rho \sqrt{h(1)} + \rho^2 \sqrt{B(2)}$$

$$V(1, B) = \max_{h(1)} \rho \sqrt{h(1)} + \rho^2 \sqrt{B(2)}$$

$$V(2, B) = \rho^2 \sqrt{B}$$

Alle diskrete er her gitt fra definisjoner av verdifunksjoner.

Vi går baklengs, og finner først $h^*(1)$:

Fra DPP vet vi at

$$V(1, B) = \max_{h(1)} \rho \sqrt{h(1)} + V(2, B(2))$$

Fra over vet vi at $V(2, B(2)) = \rho^2 \sqrt{B(2)}$,
mens dynamikken til betanden er

$$B(2) = (1+r)(B(1) - h(1)) = (1+r)(B - h(1))$$

Innsatt gir dette

$$\begin{aligned} V(1, B) &= \max_{h(1)} \rho \sqrt{h(1)} + \rho^2 \sqrt{(1+r)(B - h(1))} \\ &= \max_{h(1)} \rho \sqrt{h(1)} + \rho^2 \sqrt{1+r} \sqrt{B - h(1)} \end{aligned}$$

Defineres $f(x) = f\sqrt{x} + f^2\sqrt{1+r}\sqrt{B-x}$, og
 maksimer denne

$$f'(x) = f \frac{1}{2\sqrt{x}} + f^2\sqrt{1+r} \frac{1}{2\sqrt{B-x}} (-1) = 0$$

$$\dots \Rightarrow x^* = \frac{B}{1+f^2(1+r)}$$

Siden $f^2(1+r) > 0$ vil $0 < x^* < B$, og dermed

$$\text{er } h^*(1) = \frac{B(1)}{1+f^2(1+r)}$$

(Vi bruger ikke $\frac{\partial}{\partial x}$ at x^* , og dermed $h^*(1)$, er et
 maksimum (og ikke et minimum))

Med denne optimale $h^*(1)$ og ved $V(1, B)$:
 (NB: $B(1) = B$ udt.)

$$\begin{aligned} V(1, B) &= f\sqrt{h^*(1)} + f^2\sqrt{1+r}\sqrt{B-h^*(1)} \\ &= f\sqrt{\frac{B}{1+f^2(1+r)}} + f^2\sqrt{1+r}\sqrt{B - \frac{B}{1+f^2(1+r)}} \\ &= f\sqrt{1+f^2(1+r)} \cdot \sqrt{B} \end{aligned}$$

Finnes nå $h^*(L)$: DPP sier

$$V(0, B) = \max_{h(L)} \sqrt{h(L)} + V(1, B/1)$$

$$= \max_{h(L)} \sqrt{h(L)} + g \sqrt{1+f^2(1+r)} \sqrt{B/1}$$

$$\stackrel{\sim}{=} (1+r)(B-h(L))$$

$$= \max_{h(L)} \sqrt{h(L)} + g \sqrt{1+f^2(1+r)} \sqrt{1+r} \sqrt{B-h(L)}$$

Definerer $f(x) = \sqrt{x} + k \sqrt{B-x}$, $k = g \sqrt{1+f^2(1+r)} \sqrt{1+r}$, og

maksimerer denne.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + k \frac{1}{2\sqrt{B-x}} \cdot (-1) = 0$$

Etter litt regning ~ $x^* = \frac{B}{1+f^2(1+r)+g^4(1+r)^2}$

V; har at $f^2(1+r) > 0$ og $g^4(1+r)^2 > 0$, så

$1+f^2(1+r)+g^4(1+r)^2 > 1$. Dermed vil $0 < x^* < B$

$$\Rightarrow h^*(L) = \frac{B}{1+f^2(1+r)+g^4(1+r)^2}$$

(Vi bruger heller ikke nå $\hat{a}$ i jeblik at dette er et
maksimum, i følge opgaven).