

Multiplikation av matriser

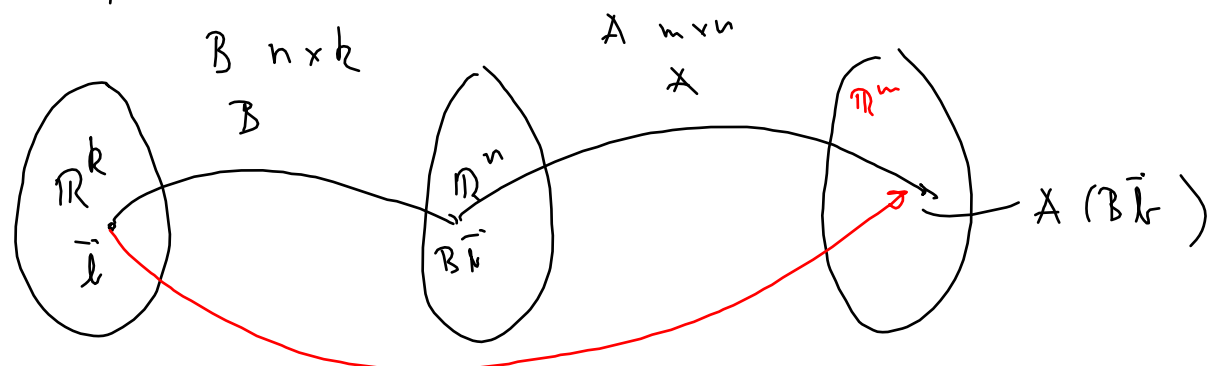
Notation: $\mathbb{R}^n$ = mängden av alla radervektorer med n komponenter.

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^n \text{ betyder } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Förrige gång: A $m \times n$ -matris, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{c} = A\vec{b} \in \mathbb{R}^m$$

c_i = prickprodukt av i -te rad i A med $\vec{b}$

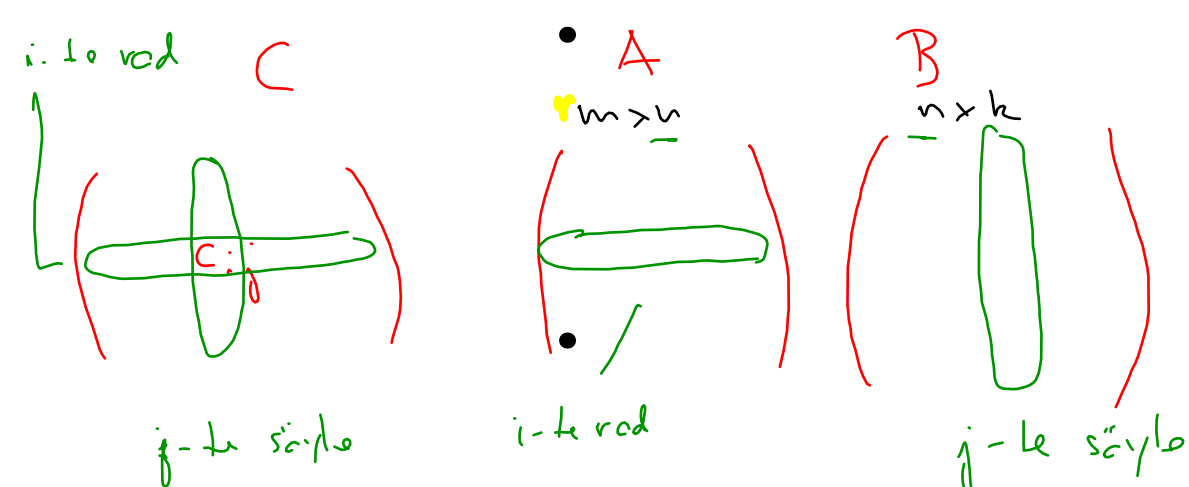


C ?
 $m \times k$ -matriser

Spörsnål: Finns det en $m \times k$ -matris C slik $C\vec{b} = A(\vec{b})$

för alla $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$?

Svar: Ja, det finns nämligen en slik matris C og den er gitt ved:



c_{ij} = prickprodukt mellom i -te rad i A og j -te søyle i B

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ AB 2×2 -matris

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -14 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$$

BA 3×3 -matris

3×2 2×3

Regulere: (i) $(AB)C = A(BC)$ assosiativ lov

(ii) $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$ distributiv lov

(iii) $(\lambda A)B = \lambda(AB)$, $A(\lambda B) = \lambda(AB)$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

OBSERVAT: Ingen regel om $AB = BA$!!

Beweis for (iv): A $m \times n$, B $n \times k$ AB $m \times k$ -matris (AB)^T = $k \times m$ -matris
 A^T $n \times m$, B^T $k \times n$ $B^T A^T$ $k \times m$ -matris

ij -te komponent i $(AB)^T$ = ji -te komponent i AB

= j -te rad i A gangt med i -te søyle i B

ij -te komponent i $B^T A^T$ = i -te rad i B^T gangt med j -te søyle i A^T

= i -te søyle i B gangt med den j -te raden i A Like

Ikke-kommutativ multiplikation

Hvis A og B er to $n \times n$ -matriser, så vil også

AB og BA være to $n \times n$ -matriser.

$$\begin{array}{cc} n \times n & n \times n \\ \text{---} & \text{---} \\ & n \times n \end{array}$$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Matricemultiplikation er ikke kommutativ!

Må være forsigtig:

$$\begin{aligned} (A+B)(A+B) &= \underbrace{(A+B)} \underbrace{(A+B)} = A \cdot A + BA + AB + B \cdot B \\ &= A^2 + \underbrace{BA + AB}_{\text{kan ikke slås sammen}} + B^2 \end{aligned}$$

Identitetsmatrisen og inverse matriser

$n \times n$ -identitetsmatrise

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eksempel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Generelt $I_n A = A I_n = A$ for alle $n \times n$ -matriser.

Definition: Hvis A er en $n \times n$ -matrise, så kaldes en anden $n \times n$ -matrise B en invers til A dersom

$$AB = I_n \quad \text{og} \quad BA = I_n$$

Eksempel: Find en invers til $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$

Trænger $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+u \\ -3x-z & -3y-u \end{pmatrix} \stackrel{||}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Opskriv}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Må ha} & 2x+z=1 & 2y+u=0 \\ & -3x-z=0 & -3y-u=1 \end{array}$$

Løser systemet $-x=1 \Rightarrow x=-1$
 $-y=1 \Rightarrow y=-1$
 $z=-3x=3$
 $u=-2y=2$

Altså $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, må også opfylde $BA = I_2$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) & -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversen til A er $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Faktum: Hvis $AB = I_n$, så $BA = I_n$

Eksempel: Find en invers til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

$$I_2 = AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2z & 2y-2u \\ -x+z & -y+u \end{pmatrix} \stackrel{\text{Opskriv}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Må ha} & 2x-2z=1 & 2y-2u=0 \\ & -x+z=0 & -y+u=1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x=z \\ 2x-2x=1 \\ 0=1 \end{array} \right\} \text{Ingen løsning}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ har ingen invers.}$$

Definition: En $n \times n$ -matrise som har en invers, kaldes invertibel

En $n \times n$ -matrise som ikke har invers, kaldes singular.

Sætning: En $n \times n$ -matrise kan højst én invers.

Bevis: Antag at B, C er inverter til A . Da har vi

$$B = I_n B = (CA)B = C \underbrace{(AB)}_{I_n} = C I_n = C$$

Definition: Hvis A er invertibel, så kaldes den inverse A^{-1} .

Sætning: Dersom A og B er to invertibele matriser, så er AB også invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bevis: Må vise at $AB(B^{-1}A^{-1}) = I_n$

$$\underbrace{AB(B^{-1}A^{-1})}_{I_n} = A \underbrace{(BB^{-1})}_{I_n} A^{-1} = A I_n A^{-1} = A A^{-1} = I_n$$

Sætning: Hvis A er invertibel, så er A^T også invertibel og

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Bevis: Må vise at $(A^T)(A^{-1})^T = I_n$

$$\underbrace{(A^T)(A^{-1})^T}_{I_n} = (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = I_n$$

En passig notation: $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^T \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \vec{x} \cdot \vec{y}$$