

Plasering av kraftverk

Utfordring: Placera kraftverk på d städer: $1, 2, \dots, d$.

Kraftverk på stad i producerar R_i (stokastisk variabel) per
enhet energi.

Tueringen $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$

Samlad produksjon: $\vec{w}^T \vec{R} = \sum_{i=1}^d w_i R_i$

Gener: $E[R_i] = r_i$, $E[R_i R_j] = c_{ij}$

Vi ønsker en gjennomsnittlig produksjon på r , og har et
budsjett $\sum_{i=1}^d w_i = k$, og ønsker minst mulig varians.

Matematisk oppsett:

Minimere variansen: $\vec{w}^T \in \vec{w}$ under betingelsene

$$\vec{w}^T \vec{r} = r, \quad \vec{w}^T \vec{1} = k, \quad w_i \geq 0$$

Teknikk: Kvadratisk optimering.

Minimering av avvik

Skal dekke et energibeltet E (stokastisk variabel)

Kraftverk: $1, \dots, d$ med energi produksjon R_i

Hvis vi investerer w_i i hvert kraftverk, så har vi en samlet produksjon

$$R = \sum_{i=1}^d w_i R_i = \vec{w}^T \vec{R}$$

Minimerer: $E[(R-E)^2]$, $w_i \geq 0$

Informasjon: kjennetegn: $\mu_E = E[E]$

kjennetegn: $r_i = E[R_i]$

— " — $c_{ij} = E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)] = \text{cov}(R_i, R_j)$

$$R_i = \text{cov}(R_i, E), \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$$

Lemma: $E[(R-E)^2] = \vec{w}^T C \vec{w} + (\vec{w}^T \vec{r} - \mu_E)^2 - 2 \vec{w}^T \vec{b} + \text{var}(E)$

Bevis: $E[(R-E)^2] = E[(\underbrace{(R - \mu_R)}_{\text{var } R = \vec{w}^T C \vec{w}}) + \underbrace{(\mu_R - \mu_E)}_{\text{var}(E)} + \underbrace{(\mu_E - E)}_{\text{var}(E)}]^2]$

$$= E[(R - \mu_R)^2 + (\mu_R - \mu_E)^2 + (\mu_E - E)^2]$$
$$+ E\{2(R - \mu_R)(\mu_R - \mu_E) + 2(R - \mu_R)(\mu_E - E) + 2(\mu_R - \mu_E)(\mu_E - E)\}$$
$$= \vec{w}^T C \vec{w} + (\sum w_i r_i - \mu_E)^2 + \text{var}(E)$$
$$+ 0 - 2 E[(R - \mu_R)(E - \mu_E)] + 0$$
$$= \vec{w}^T C \vec{w} + (\vec{w}^T \vec{r} - \mu_E)^2 + \text{var}(E)$$
$$- 2 E[\sum w_i (R_i - r_i)(E - \mu_E)]$$
$$= \vec{w}^T C \vec{w} + (\vec{w}^T \vec{r} - \mu_E)^2 + \text{var}(E)$$
$$- 2 \sum w_i b_i =$$
$$= \vec{w}^T C \vec{w} + (\vec{w}^T \vec{r} - \mu_E)^2 - 2 \vec{w}^T \vec{b} + \text{var}(E)$$

Ønsker å finne den vektoren $\vec{w}$ som minimerer dette uttrykket
(og som er slik at $w_i \geq 0$)

Må minimere:

$$L(\vec{w}) = \vec{w}^T C \vec{w} + (\vec{w}^T \vec{r} - \mu_E)^2 - 2 \vec{w}^T \vec{b}$$

Lemma: $\underbrace{(\vec{w}^T \vec{r})}_{\text{tall}} \vec{r} = \underbrace{(\vec{r} \vec{r}^T)}_{d \times d} \vec{w}$ $\vec{r} \vec{r}^T = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix} (r_1, r_2, \dots, r_d)$

Bevis: $(\vec{w}^T \vec{r}) \vec{r}$ er en vektor med

i -te komponent

$$\left(\sum_{j=1}^d w_j r_j \right) r_i = \sum_{j=1}^d w_j r_i r_j$$

$(\vec{r} \vec{r}^T) \vec{w}$ er en vektor med i -te komponent

$$\sum_{j=1}^d r_i r_j w_j = \sum_{j=1}^d w_j r_i r_j$$

Önsken är minimera:

$$L(\vec{w}) = \vec{w}^T C \vec{w} + (\vec{w}^T \vec{r} - \mu_{\text{f}})^2 - 2\vec{w}^T \vec{b}$$

Via krav på gradienten $\nabla L = 0$:

$$\nabla L(\vec{w}) = \underbrace{2C\vec{w}}_{\text{kan dra}} + \underbrace{2(\vec{w}^T \vec{r} - \mu_{\text{f}})}_{\text{för}} \vec{r} - 2\vec{b}$$

Krav: $\nabla L = 0$

$$2C\vec{w} + \underbrace{2(\vec{w}^T \vec{r})}_{(\vec{r} \cdot \vec{r}^T) \vec{w}} \vec{r} - 2\mu_{\text{f}} \vec{r} - 2\vec{b} = 0$$

$$\cancel{2C\vec{w}} + \cancel{2(\vec{r} \cdot \vec{r}^T) \vec{w}} - \cancel{2\mu_{\text{f}} \vec{r}} + \cancel{2\vec{b}}$$

$$[C + (\vec{r} \cdot \vec{r}^T)] \vec{w} = \mu_{\text{f}} \vec{r} + \vec{b}$$

$$\vec{w} = (C + \vec{r} \cdot \vec{r}^T)^{-1} (\mu_{\text{f}} \vec{r} + \vec{b})$$

Samt en lösning föreligger då $w_i \geq 0$ för alla i .

Exempel: Skerfvekt i Tystland:

1. Hamburg	$r_1 = 0.382$	$\sigma_1 = 0.244$	$p_{12} = 0.36, p_{13} = 0.05, p_{23} = 0.16$
2. Berlin	$r_2 = 0.393$	$\sigma_2 = 0.247$	
3. München	$r_3 = 0.456$	$\sigma_3 = 0.265$	

$c_{ij} = p_{ij} \sigma_i \sigma_j$

Kovariansmatris

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & \sigma_2^2 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 & 0.023 & 0.003 \\ 0.023 & 0.06 & 0.01 \\ 0.003 & 0.01 & 0.07 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} \vec{r}^T = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \dots & r_i r_j & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.146 & 0.150 & 0.174 \\ 0.150 & 0.154 & 0.179 \\ 0.174 & 0.179 & 0.208 \end{pmatrix}$$

$$(C + \vec{r} \vec{r}^T) = \begin{pmatrix} 0.206 & 0.173 & 0.177 \\ 0.173 & 0.214 & 0.189 \\ 0.177 & 0.189 & 0.278 \end{pmatrix}$$

$$(C + \vec{r} \vec{r}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 16.43 & -10.12 & -3.58 \\ -10.12 & 17.93 & -5.75 \\ -3.58 & -5.75 & 9.78 \end{pmatrix}$$

Andar $\vec{b} = 0$ som i heftet:

$$\vec{w} = (C + \vec{r} \vec{r}^T)^{-1} (\mu_{\text{f}} \vec{r})$$

$$100 (C + \vec{r} \vec{r}^T)^{-1} \vec{r}$$

$$= 100 \begin{pmatrix} 16.43 & -10.12 & -3.58 \\ -10.12 & 17.93 & -5.75 \\ -3.58 & -5.75 & 9.78 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.382 \\ 0.393 \\ 0.456 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 54 \\ 83 \end{pmatrix}$$

100