

Litt bakgrunn fra sannsynlighetsregning:

Stokastisk variabel: En størrelse $\bar{X}$ som antar forskjellige verdier med ulik sannsynlighet.

Forventning: $E[\bar{X}]$ gjennomsnitt til $\bar{X}$.

Variansen: $\text{var}(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = E[(\bar{X} - E(\bar{X}))^2]$

Standardavviket: $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\text{var}(\bar{X})} = \sqrt{E[(\bar{X} - E(\bar{X}))^2]}$

Kovarians: $\text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) = E[(\bar{X} - E(\bar{X}))(\bar{Y} - E(\bar{Y}))]$

$\text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) > 0$ $\bar{X}, \bar{Y}$ er positivt korrelert

$\text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) < 0$ —||— negativt —||—

Korrelasjon: $\rho_{\bar{X}, \bar{Y}} = \frac{\text{cov}(\bar{X}, \bar{Y})}{\sigma_{\bar{X}} \sigma_{\bar{Y}}}$

$$-1 \leq \rho_{\bar{X}, \bar{Y}} \leq 1$$

Mange variable: $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_n$

$$c_{ij} = \text{cov}(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = c_{ji}$$

$$c_{ii} = \text{var}(\bar{X}_i) = \sigma_{\bar{X}_i}^2 = \sigma_i^2$$

Kovarians matriser:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & \dots & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{symmetrisk matrise}$$

$$c_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Investitionen

Marked restaurants on chips: $1, 2, \dots, n$

$S_{i,0}$ - prisen på aksje i vår i gjen investeringen

S_i — " — — — — red redisering (stokastisk variabel)

Calculating the slope: $R_i = \frac{S_i - S_{i,0}}{S_{i,0}}$ $r_i = E[R_i]$

Inledning: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $a_i =$ antall alper i kjøper av
atsip i

Verdien hit gæsteføljen ved tidspunkt 0:

den til påfølgende tidspunkt σ :

$$\sum_{i=1}^n a_i s_{i,\sigma} = \vec{a}^T \vec{s}_\sigma \quad \text{der} \quad \vec{s}_\sigma = \begin{pmatrix} s_{1,\sigma} \\ s_{2,\sigma} \\ \vdots \\ s_{n,\sigma} \end{pmatrix}$$

Verdien ved realisering:

Verdien ved realisering:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i = \vec{\alpha}^T \vec{S} \quad \text{der} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}$$

Aufkantung am Pakföfper:

$$= \frac{\frac{a^T \vec{S} - a^T \vec{S}_0}{a^T \vec{S}_0} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i S_i - \sum_{i=1}^n a_i S_{i,0}}{\sum_{i=1}^n a_i S_{i,0}}}{\frac{\sum_{i=1}^n a_i (S_i - S_{i,0})}{\sum_{i=1}^n a_i S_{i,0}}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i S_{i,0} \frac{S_i - S_{i,0}}{S_{i,0}}}{\sum_{i=1}^n a_i S_{i,0}} \quad R_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i S_{i0}}{\sum_{i=0}^n \alpha_i S_{i0}} R_i = \sum_{i=1}^n w_i R_i$$

der $w_i = \frac{\alpha_i \cdot Si_i}{\sum \alpha_i \cdot Si_i}$ Anteil an Investitionen sum α_i abge. unter i .

$\sum w_i = 1$, men siden har lav bl
i selge kort, kan man sætte w_i 'en
være negativ.

Uppsummering: Avslutning av projektet

$$\sum_{i=1}^n w_i R_i = \vec{w}^T \vec{R}$$

Forwarderkwartierung: $E[\sum_{i=1}^n w_i R_i] = \sum_{i=1}^n w_i E[R_i] = \sum_{i=1}^n w_i r_i = \vec{w}^T \vec{r}$

Various : $\sigma_{\bar{w}}^2 = E \left[\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i - \sum_{i=1}^n w_i r_i \right)^2 \right]$

$$= E \left[\left(\sum_{i=1}^n w_i (R_i - r_i) \right)^2 \right] = E \left[\left(\sum_{i=1}^n w_i (R_i - r_i) \right) \left(\sum_{j=1}^n w_j (R_j - r_j) \right) \right]$$

$$= E \left[\sum_{1 \leq i, j \leq n} w_i w_j (R_i - r_i)(R_j - r_j) \right]$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} w_i w_j \underbrace{E[(R_i - r)(R_j - r)]}_{C_{ij}}$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} w_i w_j C_{ij} = \vec{w}^T C \vec{w}$$

Markowitz - teori

Grundleggende problemstilling:

Vi ønsker en gennemsnitlig afkastning på r . Hvordan kan vi lade en portefølje som har mindst muligt risiko.

Vi ønsker at gøre en investering $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ slik at
 $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$ des $\vec{w}^T \vec{1} = 1$ der $\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
 og $w_1 r_1 + w_2 r_2 + \dots + w_n r_n = r$ des $\vec{w}^T \vec{r} = r$

Som minimerer variansen/risikoen

$$\vec{w}^T C \vec{w}$$

Opsætt for Lagranges multiplikator metode:

$$\text{Minimer } f(w_1, \dots, w_n) = \frac{1}{2} \vec{w}^T C \vec{w} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} w_i w_j$$

under betingelserne

$$g(w_1, \dots, w_n) = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \dots + w_n r_n = r$$

$$h(w_1, \dots, w_n) = w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$$

$$\text{Lagrange: } \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

$$\vec{w}^T \vec{r} = r$$

$$\vec{w}^T \vec{1} = 1$$

$$\nabla f = \nabla \left(\frac{1}{2} \sum C_{ij} w_i w_j \right) = C \vec{w}$$

$$\nabla g = \vec{r}$$

$$\nabla h = \vec{1}$$

Dermed blir ligningene:

$$C \vec{w} = \lambda \vec{r} + \mu \vec{1}$$

$$\vec{w}^T \vec{r} = r$$

$$\vec{w}^T \vec{1} = 1$$

vi løse disse

Ganger med C^{-1}

$$C^{-1} C \vec{w} = C^{-1} (\lambda \vec{r} + \mu \vec{1})$$

$$\vec{w} = \lambda C^{-1} \vec{r} + \mu C^{-1} \vec{1}$$

Vi bestemmer λ og μ ved at sette uttrykket inn i de to siste ligningene:

$$\begin{aligned} r &= \vec{w}^T \vec{r} = \vec{r}^T \vec{w} = \vec{r}^T (\lambda C^{-1} \vec{r} + \mu C^{-1} \vec{1}) \\ &= \lambda \vec{r}^T C^{-1} \vec{r} + \mu \vec{r}^T C^{-1} \vec{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \vec{w}^T \vec{1} = \vec{1}^T \vec{w} = \vec{1}^T (\lambda C^{-1} \vec{r} + \mu C^{-1} \vec{1}) \\ &= \lambda \vec{1}^T C^{-1} \vec{r} + \mu \vec{1}^T C^{-1} \vec{1} \end{aligned}$$

To ligninger med to ukjente:

$$\lambda \underbrace{\vec{r}^T C^{-1} \vec{r}}_b + \mu \underbrace{\vec{r}^T C^{-1} \vec{1}}_a = r$$

$$\lambda \underbrace{\vec{1}^T C^{-1} \vec{r}}_a + \mu \underbrace{\vec{1}^T C^{-1} \vec{1}}_c = 1$$

$$\begin{aligned} b\lambda + a\mu &= r \\ a\lambda + c\mu &= 1 \end{aligned} \quad \text{der } b = \vec{r}^T C^{-1} \vec{r} \\ a = \vec{r}^T C^{-1} \vec{1} \\ c = \vec{1}^T C^{-1} \vec{1}$$

Løser og får

$$\lambda = \frac{cr-a}{bc-a^2}, \quad \mu = \frac{b-ar}{bc-a^2}$$

Den optimale porteføljen blir

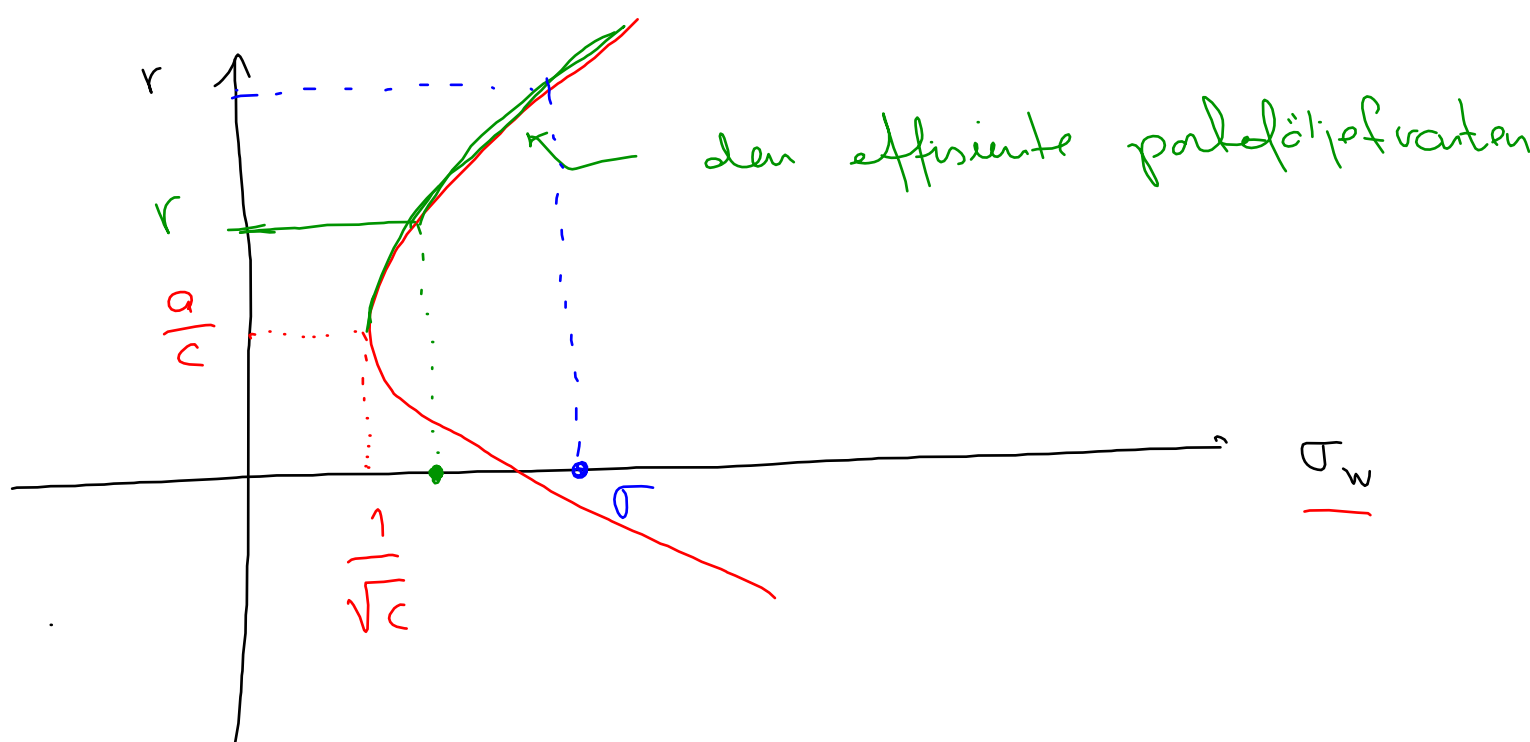
$$\vec{w}^* = \lambda C^{-1} \vec{r} + \mu C^{-1} \vec{1}$$

$$= \frac{cr-a}{bc-a^2} C^{-1} \vec{r} + \frac{b-ar}{bc-a^2} C^{-1} \vec{1}$$

Hva er variansen?

$$\sigma_{\vec{w}^*}^2 = \vec{w}^{*T} C \vec{w}^* = \frac{(r - \frac{a}{c})^2}{bc-a^2} + \frac{1}{c}$$

ser vi ligningen til en hyperbel.



To spørsmål:

(i) Gitt r . Hva er den minste variansen i porteføljen?

(ii) Gitt σ_w . Hva er da den størst forventede avkastningen?

Hva skjer hvis vi bare kan velge fra et mindre utvalg av aksjer

