

Oppgave 1: Fiske over 3 år:

	0	1	2	3
	1	1	1	restbestand B(3)
	u_0	u_1	u_2	

Uteytle: $\sqrt{u_0} + \rho \sqrt{u_1} + \rho^2 \sqrt{u_2} + \rho^3 \sqrt{B(3)}$

Gitt en begynnelsesbestand B(0), finn de optimale strategiene u_0, u_1, u_2 .

Nyttig regneregler: Finn maksimumspunkt og maksimumsverdi til

$$f(u) = A\sqrt{u} + B\sqrt{R(x-u)}$$

Deriver: $f'(u) = \frac{A}{2\sqrt{u}} + \frac{B}{2\sqrt{R(x-u)}} (-R) = \frac{A}{2\sqrt{u}} - \frac{BR}{2\sqrt{R(x-u)}}$

Løs $f'(u) = 0$:

$$\frac{A}{2\sqrt{u}} = \frac{BR}{2\sqrt{R(x-u)}} \Rightarrow A\sqrt{R(x-u)} = BR\sqrt{u}$$

$$\Rightarrow A^2 R(x-u) = B^2 R^2 u \Rightarrow A^2 x = (B^2 R + x^2 R) u$$

$$\Rightarrow u = \frac{A^2}{A^2 + B^2 R} x \quad \left(\begin{array}{l} \text{sjekk at dette virkelig er en løsning og} \\ \text{at } u \text{ er et maksimumspunkt} \end{array} \right)$$

Maksimumsverdi u :

$$\begin{aligned} f(u) &= A\sqrt{u} + B\sqrt{R(x-u)} = A\sqrt{\frac{A^2}{A^2+B^2R}x} + B\sqrt{R\left(x - \frac{A^2}{A^2+B^2R}x\right)} \\ &= \frac{A^2}{\sqrt{A^2+B^2R}}\sqrt{x} + B\sqrt{R\left(\frac{x+B^2R}{A^2+B^2R}x - \frac{x^2}{A^2+B^2R}x\right)} \\ &= \frac{A^2}{\sqrt{A^2+B^2R}}\sqrt{x} + B\sqrt{\frac{B^2R^2}{A^2+B^2R}x} = \left(\frac{A^2}{\sqrt{A^2+B^2R}} + \frac{B^2R}{\sqrt{A^2+B^2R}}\right)\sqrt{x} \\ &= \frac{A^2+B^2R}{\sqrt{A^2+B^2R}}\sqrt{x} = \sqrt{A^2+B^2R}\sqrt{x} \end{aligned}$$

Oppsummering: $f(u) = A\sqrt{u} + B\sqrt{R(x-u)}$ har maksimumsverdi $\sqrt{A^2+B^2R}\sqrt{x}$ i punkt $u = \frac{A^2}{A^2+B^2R}x$

Går tilbake til problemstillingen ved tiden $t=2$: Anta at vi har en bestand x , og ønsker å maksimere

$$\rho^2 \sqrt{u_2} + \rho^3 \sqrt{B(3)}$$

Anta at vi fisker en mengde u : Må optimere

$$\rho^2 \sqrt{u} + \rho^3 \sqrt{R(x-u)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Problemet løses med} \\ A = \rho^2 \text{ og } B = \rho^3 \end{array} \right)$$

Maksimumspunktet er: $u = \frac{A^2}{A^2+B^2R}x = \frac{\rho^4}{\rho^4+\rho^6R}x = \frac{1}{1+\rho^2R}x$

Maksimumsverdien: $\sqrt{A^2+B^2R}\sqrt{x} = \sqrt{\rho^4+\rho^6R}\sqrt{x} = \rho^2\sqrt{1+\rho^2R}\sqrt{x}$

Verdifunksjonen ved tiden $t=2$:

$$V_2(x) = \rho^2 \sqrt{1+\rho^2R}\sqrt{x}$$

Ser nå på situasjonen ved tiden $t=1$. Anta at bestanden er x . Hvis vi fisker u , og derfor opplever optimalt, får vi utbyttet

$$\rho \sqrt{u} + V_2(R(x-u)) = \rho \sqrt{u} + \rho^2 \sqrt{1+\rho^2R}\sqrt{R(x-u)}$$

Vi optimerer denne funksjonen (bruker $A=\rho$, $B=\rho^2\sqrt{1+\rho^2R}$; løsningen ovenfor).

Maksimumspunkt: $u = \frac{A^2}{A^2+B^2R}x = \frac{\rho^2}{\rho^2+\rho^4(1+\rho^2R)}x = \frac{1}{1+\rho^2R+\rho^4R^2}x$

Maksimumsverdi: $\sqrt{A^2+B^2R}\sqrt{x} = \sqrt{\rho^2+\rho^4(1+\rho^2R)}\sqrt{x} = \rho \sqrt{1+\rho^2R+\rho^4R^2}\sqrt{x} = V_1(x)$

Ser til slutt på situasjonen ved tiden $t=0$. Anta at bestanden er x og at vi fisker u . Da blir nytten

$$\sqrt{u} + V_1(R(x-u))$$

Vi må finne maksimumsverdien til

$$f(u) = \underbrace{\sqrt{u}}_{A=1} + \underbrace{\rho \sqrt{1+\rho^2R+\rho^4R^2}}_B \sqrt{R(x-u)}$$

Bruker det generelle oppsettet med $A=1$, $B=\rho \sqrt{1+\rho^2R+\rho^4R^2}$

Maksimumspunkt: $u = \frac{A^2}{A^2+B^2R}x = \frac{1}{1+\rho^2(1+\rho^2R+\rho^4R^2)R}x = \frac{x}{1+\rho^2R+\rho^4R^2+\rho^6R^3}$

Maksimumsverdi: $\sqrt{A^2+B^2R}\sqrt{x} = \sqrt{1+\rho^2(1+\rho^2R+\rho^4R^2)R}\sqrt{x} = \sqrt{1+\rho^2R+\rho^4R^2+\rho^6R^3}\sqrt{x}$

Verdifunksjonen ved tid 0:

$$V_0(B) = \sqrt{1+\rho^2R+\rho^4R^2+\rho^6R^3}\sqrt{x}$$

fangst ved år n vil være

Ser på optimal

høstperiode.

Starter med $B = B(0)$.

$$\text{Fangst i år 0: } u(0) = \frac{1}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B \quad \leftarrow$$

Gjenværende bestand: $B - u(0) = \frac{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B - \frac{1}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B$

$$= B \frac{f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} = f^2 R B \frac{1 + f^2 R + f^4 R^2}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3}$$

Bestand i år 1: $B(1) = R(B - u(0)) = f^2 R^2 \frac{1 + f^2 R + f^4 R^2}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B \quad \leftarrow$

Maximal fangst i år 1: $\times \frac{1}{1 + f^2 R + f^4 R^2}$

Vi får

$$u(1) = B(1) \frac{1}{1 + f^2 R + f^4 R^2} = f^2 R^2 \frac{1 + f^2 R + f^4 R^2}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} \cdot \frac{1}{1 + f^2 R + f^4 R^2}$$

$$= \frac{f^2 R^2}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B \quad \leftarrow$$

Gjenværende bestand: $B(1) - u(1) = \frac{f^2 R^2 (1 + f^2 R + f^4 R^2)}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B$

$$- \frac{f^2 R^2}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B$$

$$= \frac{f^2 R^2 (1 + f^2 R + f^4 R^2)}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B = f^4 R^3 \frac{1 + f^2 R}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B$$

Bestand i år 2: $B(2) = R(B(1) - u(1)) = f^4 R^4 \frac{1 + f^2 R}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B$

Optimal høsting: $u = \frac{1}{1 + f^2 R} \times$

Setter inn $B(2)$ for x :

$$u(2) = f^4 R^4 \frac{1 + f^2 R}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B \cdot \frac{1}{1 + f^2 R} = \frac{f^4 R^4}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B \quad \leftarrow$$

Gjenværende bestand: $B(2) - u(2) = f^4 R^4 \frac{1 + f^2 R}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B$

$$- \frac{f^4 R^4}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} B$$

$$= f^6 R^6 \frac{B}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3}$$

$$B(3) = R(B(2) - u(2)) = f^6 R^6 \frac{B}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3}$$

Oppgave 2: Hva skjer når $B = 100$, $R = 1.1$ og $f = \frac{1}{1.05}$

Ser at $f^2 R = \frac{1.1}{(1.05)^2} \approx 0.997 = 1$

$$f^4 R^2 = (f^2 R)^2 = 1^2 = 1$$

$$f^6 R^3 = (f^2 R)^3 = 1^3 = 1$$

$$u(0) = \frac{B}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} = \frac{B}{1 + 1 + 1 + 1} = \frac{B}{4} = \underline{\underline{25}}$$

$$u(1) = \frac{f^2 R^2 B}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} = \frac{(f^2 R) R B}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} = \frac{1.1 \cdot B}{4} = \underline{\underline{27.3}}$$

$$u(2) = \frac{f^4 R^4 B}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} = \frac{(f^2 R)^2 R^2 B}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} = \frac{1.1^2 B}{4} = \underline{\underline{30.25}}$$

$$B(3) = \frac{f^6 R^6 B}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} = \frac{(f^2 R)^3 R^3 B}{1 + f^2 R + f^4 R^2 + f^6 R^3} \approx \frac{1.1^3 B}{4} = \underline{\underline{33.3}}$$

To avgangene i høsten: $f^2 R$, $f R$ $f^2 R^2 = (f^2 R)^2 R^2$