

Færdig gang

$$f'(\vec{a}, \vec{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

Partiellderiverte:

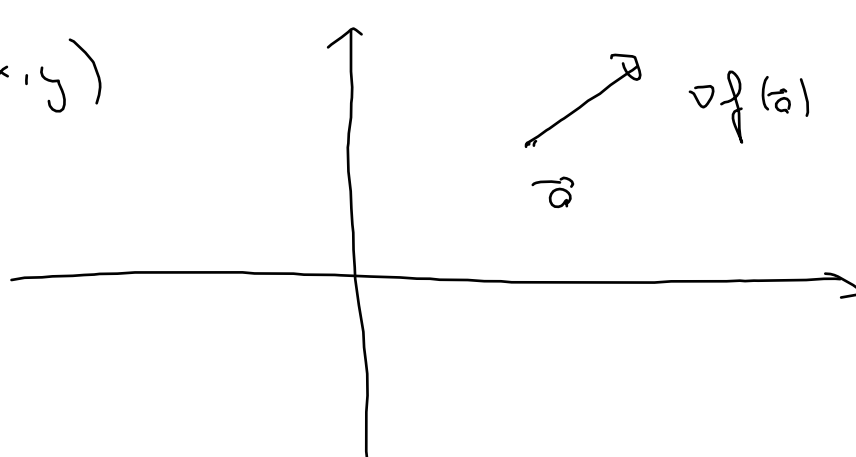
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = f'(\vec{a}, \vec{e}_i)$ = den deriverte av f mhp x_i som om alle andre variabler er konstante.

Gradienten:

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right)$$

Grafisk fremstilling:

$$z = f(x, y)$$



Teorem: Dersom alle partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ er kontinuerlige, $\vec{a}, \vec{r}$ er

$$f'(\vec{a}, \vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$$

Eksempel: Finn $f'(\vec{a}, \vec{r})$ når

$$f(x, y) = x^3 + y^2$$

$$\text{og } \vec{a} = (1, 2) \text{ og } \vec{r} = (-1, 3)$$

Finner først gradienten: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) = 3 \cdot 1^2 \cdot 2 = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) = 1^3 + 2 \cdot 2 = 5$$

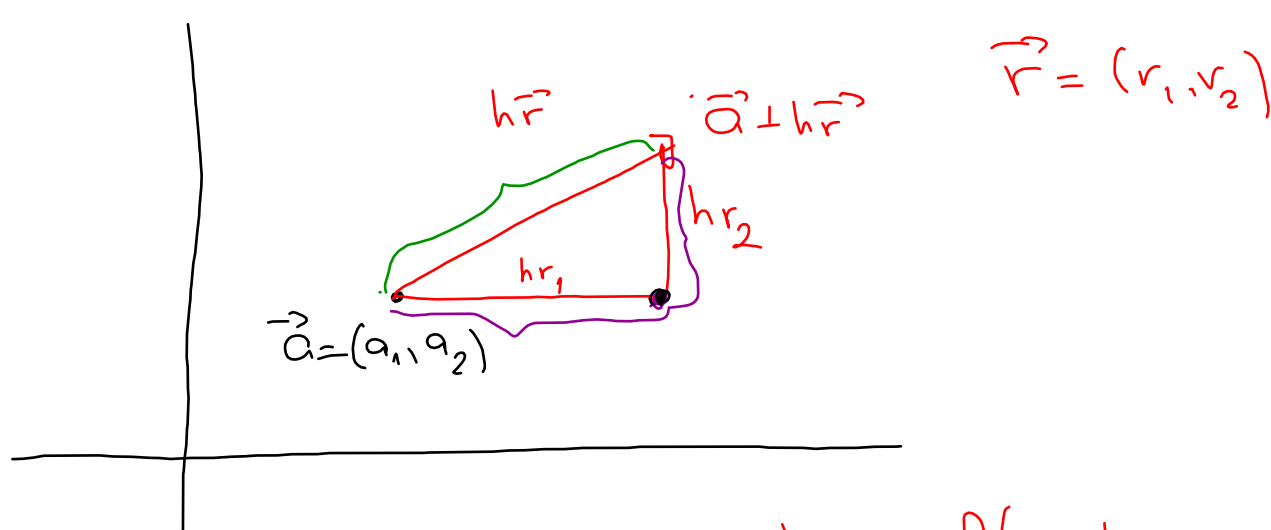
Gradienten: $\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) \right) = (6, 5)$

Behingsderiverte: $f'(\vec{a}, \vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} = (6, 5) \cdot (-1, 3) = 6(-1) + 5 \cdot 3 = \underline{9}$

Argument: Hvorfor er $f'(\vec{a}, \vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$? Ser på det

2-dimensjonale tilfelle $f(x, y)$.

Behingsderiverte: $f'(\vec{a}, \vec{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$



$$f'(\vec{a}, \vec{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

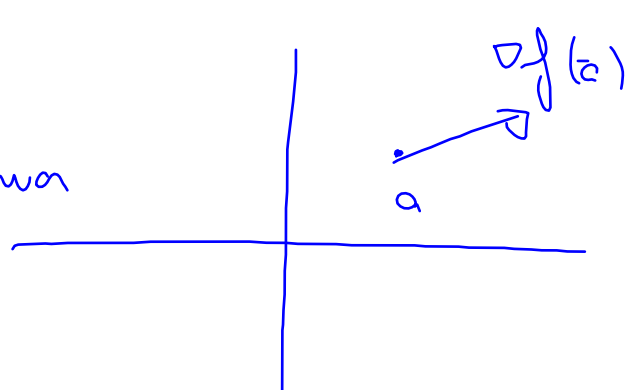
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1 + hr_1, a_2) + f(a_1 + hr_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

$$\approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) hr_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) hr_1}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) r_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) r_1$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) r_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) r_2 = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$$

Teorem: $\nabla f(\vec{a})$ peker i den retningen hvor

f vokser raskest ut fra punktet $\vec{a}$.



Argument: Husk at i 2/3-dimensjoner så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \quad \text{der } \varphi \text{ er vinkelen mellom } \vec{a} \text{ og } \vec{b}$$



La $\vec{u}$ være en enhetsvektor.

$$f'(\vec{a}, \vec{u}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} = |\nabla f(\vec{a})| |\vec{u}| \cos \varphi = |\nabla f(\vec{a})| \cos \varphi$$

$$\leq |\nabla f(\vec{a})|$$

↑ med likhet når $\varphi = 0$, det vil si $\nabla f(\vec{a}), \vec{u}$ er parallelle.

Korollar: Stigningssteilet til funksjonen i punktet $\vec{a}$ er

størst i gradientens retning og er da $|\nabla f(\vec{a})|$.

Eksempel: Hvis $f(x, y) = x^2 + 2xy$, i hvilken retning

vokser f raskest i punktet $\vec{a} = (-2, 3)$, og hva er

stigningssteilet i den retningen?

Finner gradienten: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x$

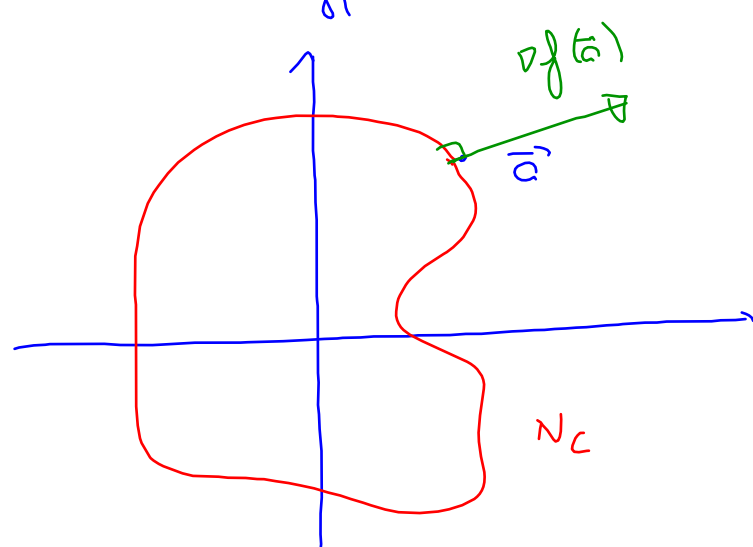
$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2, 3) = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-2, 3) = 2 \cdot (-2) = -4$$

Gradienten: $\nabla f(-2, 3) = (2, -4)$, retning med størst stigning

Stigningssteilet: $|\nabla f(-2, 3)| = |(2, -4)| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \underline{2\sqrt{5}}$

Maximum og minimumsproblemer

Observation: Gradienten i punkt $\vec{a}$ står normalt på niveaukurven gennem $\vec{a}$



Hvis $f(\vec{a}) = c$, så går niveaukurven

$$N_c = \{ \vec{x} : f(\vec{x}) = c \} \text{ går gennem } \vec{a}$$

Teorem: Dersom f har et lokalt maksimum eller minimumspunkt i $\vec{a}$ og f er differentiable i $\vec{a}$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) = 0, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) = 0.$$

Sadelpunkt:



$$f(x, y) = xy$$

Eksempel: $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4$$

Ligningssett: $2x - 2 = 0 \quad 2y + 4 = 0$
 $x = 1 \quad y = -2$

Mulig maks/min punkt $(1, -2)$ minimum

Der findes en række kriterier for at afgøre om et potentielt maks/min punkt er et

- lokalt minimum
- lokalt maks.
- sadelpunkt.

Eksempel: $f(x, y) = x^2y - 2xy + \frac{1}{2}y^2$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2y = 2y(x-1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ligningssystem} \\ 2y(x-1) = 0 \\ x^2 - 2x + y = 0 \end{array} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

Ser på tilfældet $y = 0$: Den anden ligning bliver
 $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$
 To løsninger $x = 0$, $x = 2$

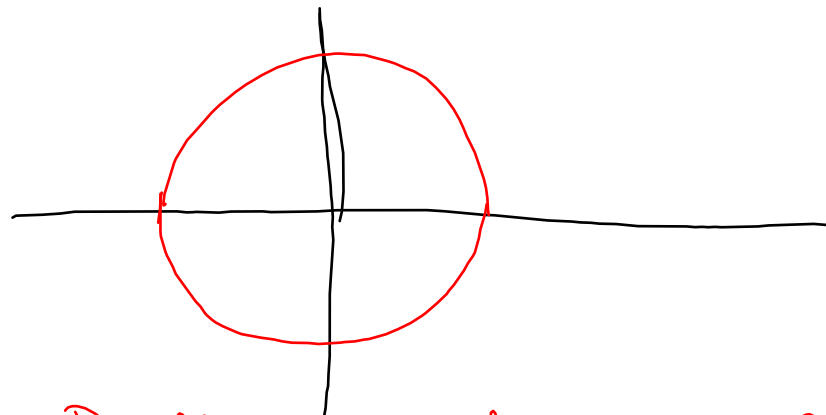
Ser på tilfældet $x = 1$: $1^2 - 2 \cdot 1 + y = 0 \Leftrightarrow -1 + y = 0 \Rightarrow y = 1$

Tre løsninger: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$
 $\searrow \quad \nearrow \quad \uparrow$
 sadelpunkt lok. minimum

Optimierung unter Nebenbedingung

Hier an den Rändern werden die Funktionen

$$f(x,y) = xy \quad \text{so suchen } \underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{\text{Nebenbedingung}}$$



Direkte Ansatzweise: Löse $x^2 + y^2 = 1$ für y :

$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Setzen dies in die Funktionsausdrücke:

$$f(x,y) = \pm x \sqrt{1 - x^2}$$

Löse für Extremal mit $\pm$: $f(x) = x \sqrt{1 - x^2}$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{1 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} (-2x)$$

$$= \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

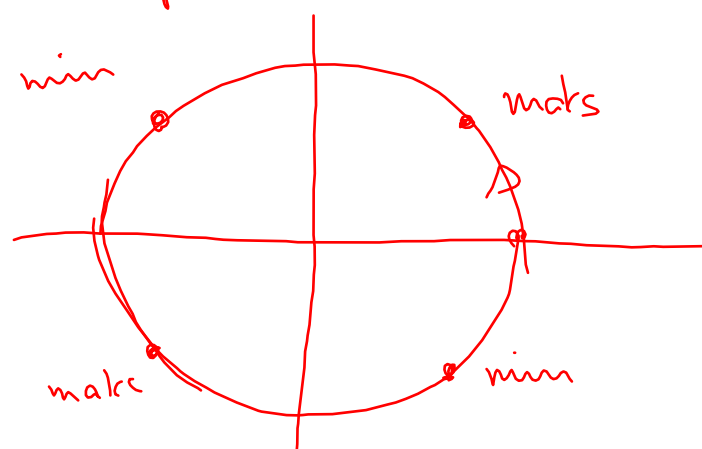
$$\text{Setze } f'(x) = 0 : \sqrt{1 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \quad | \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

$$(1 - x^2) = x^2 \\ 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Einsetzen } y\text{-Werte: } y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Die Lösungen $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Teilfall mit $y = \sqrt{1 - x^2}$

gibt 2 Lösungen die, nach $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



$$f(x,y) = xy$$

