

Dynamisk programmering

Vi har en resurs som vi vil utnyttja optimalt.

$$S_0, S_1, S_2, \dots$$

$$S_{t+1} = g(S_t) \begin{cases} g(S_t) = S_t \\ g(S_t) = rS_t \end{cases}$$

Hösting: $S_{t+1} = g(S_t - u_t)$

Önskan är optimera nyttan

$$f(0, u_0) + f(1, u_1) + \dots + f(T-1, u_{T-1}) + g(S_T)$$

↑
hösting/
utbrott vid tid 0

$$0 \leq u_i \leq S_i$$

Typisk

$$f(i, u_i) = p^i u_i^\alpha$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$0 \leq p \leq 1$$

Lösningsskeden: Beräkningsskeden:

Verdifierings: $V(t, x)$ = maximal nytta från t och utöver när vi startar med resurs x .

Begegnar med $V(T, x) = g(x)$

Anta så att vi är vid tidpunkten $T-1$ och har en resurs x .

Hvis vi höstet u , har vi en nytta

$$f(T-1, u) + g(r(x-u))$$

under förutsättning
att $S_{t+1} = r(S_t - u)$

$$V(T-1, x) = \max_u \{ f(T-1, u) + g(r(x-u)) \}$$

Generellt: Anta att vi redan finner $V(T-k, x)$. Då får vi

$$V(T-k, x) = \max_u \{ f(T-k, u) + V(T-k+1, r(x-u)) \}$$

Eksempel: Dynamisk tilvægs $S_{t+1} = r(S_t - u_t)$

Optimerer: $\sqrt{u_0} + \rho \sqrt{u_1} + \rho^2 \sqrt{S_2}$

Vi vil finde optimale udtak u_1 og u_2 .

Hjælpereqning: Finn maksimum til

$$f(u) = A\sqrt{u} + B\sqrt{x-u} \quad 0 \leq u \leq x, \quad A, B > 0.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{u}} + B \frac{1}{2\sqrt{x-u}} (-1)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{A}{\sqrt{u}} - \frac{B}{\sqrt{x-u}} \right)$$

Sæt $f'(u) = 0$: $\frac{A}{\sqrt{u}} = \frac{B}{\sqrt{x-u}} \Rightarrow A\sqrt{x-u} = B\sqrt{u}$

Kvadrer: $A^2(x-u) = B^2u \Rightarrow A^2x = (A^2+B^2)u$

Maksimerer: $x-u = \frac{B^2}{A^2+B^2}x \Rightarrow u = \frac{A^2}{A^2+B^2}x$ (maksimerer)

Maksimerer: $x-u = \frac{B^2}{A^2+B^2}x$

$$f_{\max} = A \sqrt{\frac{A^2}{A^2+B^2}x} + B \sqrt{\frac{B^2}{A^2+B^2}x}$$

$$= \frac{A^2}{\sqrt{A^2+B^2}} \sqrt{x} + \frac{B^2}{\sqrt{A^2+B^2}} \sqrt{x}$$

$$= \sqrt{x} \left(\frac{A^2+B^2}{\sqrt{A^2+B^2}} \right) = \sqrt{A^2+B^2} \sqrt{x}$$

Tilbage til problemstillingen:

Antag at i et tidspunkt 1 har en værdi x . Hvis vi udnytter u af den, får vi nytten

$$\rho \sqrt{u} + \rho^2 \sqrt{r(x-u)} = \rho \sqrt{u} + \rho^2 r \sqrt{(x-u)}$$

Skal vælge den u en som giver dette udtryk det største muligt

Dette er hjælpeproblemet vi løser med $A = \rho$ og $B = \rho^2 r$.

Den bedste u en er

$$u = \frac{A^2}{A^2+B^2}x = \frac{\rho^2}{\rho^2 + \rho^4 r}x = \frac{1}{1 + \rho^2 r}x$$

$$V(1, x) = \sqrt{A^2+B^2} \sqrt{x} = \sqrt{\rho^2 + \rho^4 r} \sqrt{x} = \rho \sqrt{1 + \rho^2 r} \sqrt{x}$$

Balancen i tid: Antag at i en tidspunkt 0 med en værdi x . Vi vil finde det optimale udtak u

$$\sqrt{u} + V(1, r(x-u)) =$$

Ma' finde maksimum til

$$\sqrt{u} + \rho \sqrt{1 + \rho^2 r} \sqrt{r(x-u)} = \sqrt{u} + \rho r \sqrt{1 + \rho^2 r} \sqrt{x-u}$$

Dette er hjælpeproblemet med $A=1$ og $B = \rho r \sqrt{1 + \rho^2 r}$

Den optimale u en

$$u = \frac{A^2}{A^2+B^2}x = \frac{1}{1 + \rho^2 r (1 + \rho^2 r)}x = \frac{1}{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2}x$$

$$V(0, x) = \sqrt{A^2+B^2} \sqrt{x} = \sqrt{1 + \rho^2 r (1 + \rho^2 r)} \sqrt{x} = \sqrt{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2} \sqrt{x}$$

Ved tidspunkt 0 er $x = S_0$,

$$V(0, S_0) = \sqrt{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2} \sqrt{S_0}$$

Hvad er det maksimale udtak i år 0 og år 1?

$$u^*(0) = \frac{1}{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2} S_0 \quad (\text{her er svaret})$$

$$\begin{aligned} \text{Hvad er } S_1? \quad S_1 &= r(S_0 - u^*(0)) = r \left(\frac{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2}{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2} S_0 - \frac{1}{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2} S_0 \right) \\ &= r \frac{\rho^2 r + \rho^4 r^2}{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2} S_0 = \frac{\rho^2 r^2 (1 + \rho^2 r)}{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2} S_0 \end{aligned}$$

Optimalt udtak i år 1:

$$\begin{aligned} u^*(1) &= \frac{1}{1 + \rho^2 r} \underbrace{x}_{S_1} = \frac{1}{1 + \rho^2 r} \frac{\rho^2 r (1 + \rho^2 r)}{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2} S_0 \\ &= \frac{\rho^2 r}{1 + \rho^2 r + \rho^4 r^2} S_0 \end{aligned}$$

Oppgave 4, prøvetaken 2024

$$b) \quad \vec{w} = \mu_E (C + \bar{r} \bar{r}^T)^{-1} \bar{r} \quad R = \sum w_i R_i = \vec{w}^T \vec{R}$$

Varianansen: $E[(R - r)^2] = \vec{w}^T C \vec{w}$

$$\vec{w}^T C \vec{w} = \mu_E^2 \left[(C + \bar{r} \bar{r}^T)^{-1} \bar{r} \right]^T C \left[(C + \bar{r} \bar{r}^T)^{-1} \bar{r} \right]$$

Oppgave 4: Korte 2025

$$b) \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} \quad r_1 = 0.2, r_2 = 0.4, r_3 = 0.1$$

Gjennomsnittlig produksjon $0.2 \cdot 15 + 0.4 \cdot 30 + 0.1 \cdot 10$
 $= 3 + 12 + 1 = \underline{\underline{16}}$