

Innhöstning under likevekt

Anta at i har en bestand med dynamikk

$$B_{t+1} = g(B_t)$$

Med innhøsting

$$B_{t+1} = g(B_t - h_t), \quad 0 \leq h_t \leq B_t$$

Likevekt:

$$B = g(B - h): \text{ Gitt } B, \text{ finn } h \text{ som tilfredsstiller dette.}$$

Lineær modell: $g(B) = RB, \quad R > 1$

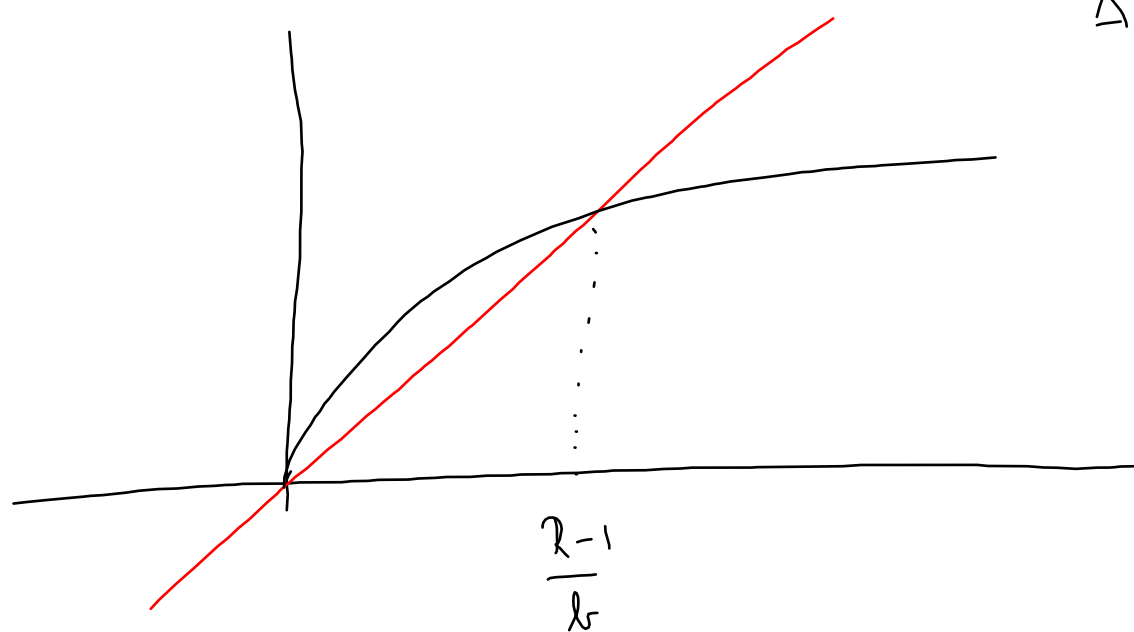
Må ha:

$$B = R(B - h) \Rightarrow B = RB - Rh \Rightarrow Rh = RB - B \Rightarrow h = \frac{R-1}{R} B$$

Høster en fast andel.

Beverton-Holt: $g(B) = \frac{RB}{1+bB}$

Antal at $B < \frac{R-1}{b}$



Løser $B = g(B - h)$, dvs

$$B = \frac{R(B-h)}{1+b(B-h)} \Rightarrow B + bB^2 - bBh = RB - Rh$$

$$\Rightarrow \underbrace{Rh - bBh}_{(R-bB)h} = RB - B - bB^2 \Rightarrow h = \frac{RB - B - bB^2}{R - bB}$$
$$= \frac{B(R - bB) - B}{R - bB} = B - \frac{B}{R - bB}$$
$$= B \left(1 - \frac{1}{R - bB} \right)$$

andel som står

nåværende (avhenger av B)

Generell modell: $B = g(B - h)$

løser for $h = \sigma(B)$ (velger direkte løsning)

Har

$$B = g(B - \sigma(B))$$

Antal at $\sigma(B)$ er deriverbar og deriverer på begge sider:

$$1 = g'(B - \sigma(B)) (1 - \sigma'(B)) = g'(B - \sigma(B)) - g'(B - \sigma(B)) \sigma'(B)$$

Løser for $\sigma'(B)$:

$$g'(B - \sigma(B)) \sigma'(B) = g'(B - \sigma(B)) - 1$$

$$\sigma'(B) = \frac{g'(B - \sigma(B)) - 1}{g'(B - \sigma(B))}$$

Differensiallikning for $\sigma(B)$.

Hva har vi egentlig goal?

Vi har regnet ut at dersom vi har en bestand B , så kan vi holde nivået på det nivået ved å høste $\sigma(B)$.

Hva er det optimale nivået $\overset{B}{\sigma(B)}$ vi får holde bestanden på?

En naturlig mulighet er å velge B slik at $\sigma(B)$ blir størst mulig.

Matematisk: Ønsker å maksimere $\sigma(B)$.

Hva skjer i våre modeller?

Lineær modell: $\sigma(B) = h = \frac{R-1}{R} B$, konstant andel, større innhøsting jo større B er.

Beverton-Holt: $g(B) = \frac{RB}{1+bB}$ for $B < \frac{R-1}{b}$

$$\sigma(B) = h = B - \frac{B}{R-bB} = B \left(1 - \frac{1}{R-bB}\right)$$

Prøver å finne et maksimum ved å derivere:

$$\begin{aligned}\sigma'(B) &= 1 - \frac{1 \cdot (R-bB) - B(-b)}{(R-bB)^2} = 1 - \frac{R-bB+bB}{(R-bB)^2} \\ &= 1 - \frac{R}{(R-bB)^2}\end{aligned}$$

Setter den deriverte lik 0: $0 = 1 - \frac{R}{(R-bB)^2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{R}{(R-bB)^2} &= 1 \Rightarrow R = (R-bB)^2 \Rightarrow R-bB = \pm \sqrt{R} \\ \Rightarrow R \pm \sqrt{R} &= bB \Rightarrow B = \frac{R \pm \sqrt{R}}{b} \text{ vi velger } B = \frac{R-\sqrt{R}}{b}\end{aligned}$$

Vi får maksimal innhøsting ved å velge $B = \frac{R-\sqrt{R}}{b}$. Den blir

$$\begin{aligned}\sigma(B) &= \sigma\left(\frac{R-\sqrt{R}}{b}\right) = \frac{R-\sqrt{R}}{b} \left(1 - \frac{1}{R-b \frac{R-\sqrt{R}}{b}}\right) \\ &= \frac{R-\sqrt{R}}{b} \left(1 - \frac{1}{R-R+\sqrt{R}}\right) = \frac{R-\sqrt{R}}{b} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{R}}\right) \\ &= \frac{R-\sqrt{R}}{b} \left(\frac{\sqrt{R}-1}{\sqrt{R}}\right) = \frac{(R-\sqrt{R})}{b} \frac{R-\sqrt{R}}{R} = \underline{\underline{\frac{(R-\sqrt{R})^2}{bR}}}\end{aligned}$$

Generelle l  sning

Gitt en modell $B_{t+1} = g(B_t)$ finne B og h slik at

(i) $B = g(B-h) = g(B-\sigma(B))$

(ii) $h = \sigma(B)$ blir st  r  st mulig

Vi har    ligninger:

(i) $B = g(B-\sigma(B))$

(ii) $\sigma'(B) = 0 \Rightarrow \sigma'(B) = \frac{g'(B-\sigma(B)) - 1}{g'(B-\sigma(B))}, \quad g'(B-\sigma(B)) = 1$

alts $\left. \begin{array}{l} B = g(B-h) \\ g'(B-h) = 1 \end{array} \right\}$

Eksempel: Ser p   logistiske vekst: $g(B) = \overbrace{(1+r)}^R B \left(1 - \frac{rB}{(1+r)K}\right)$

$$g'(B) = RB \left(1 - \frac{B}{\frac{(1+r)K}{r}}\right) = RB \left(1 - \frac{B}{K}\right) \\ = R \left(B - \frac{B^2}{K}\right)$$

Dette gir:

$$g'(B) = R \left(1 - \frac{2B}{K}\right)$$

Setter inn i de generelle ligninger

$$B = g(B-h) = R(B-h) \left(1 - \frac{B-h}{K}\right) \leftarrow$$

$$1 = g'(B-h) = R \left(1 - \frac{2(B-h)}{K}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = 1 - \frac{2(B-h)}{K} \Rightarrow \frac{2(B-h)}{K} = 1 - \frac{1}{R} \quad \left| \cdot \frac{K}{2}\right.$$

L  ser for $B-h$

$$\Rightarrow B-h = \frac{K}{2} \left(1 - \frac{1}{R}\right)$$

Setter inn i den f  rste ligningen

$$B = R \frac{K}{2} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \left(1 - \frac{\frac{K}{2} \left(1 - \frac{1}{R}\right)}{K}\right)$$

$$= \frac{K}{2} (R-1) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2R}\right) = \frac{K}{2} (R-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2R}\right)$$

$$= \frac{K}{2} (R-1) \frac{(R+1)}{2R} = \frac{K}{4R} (R^2-1)$$

$$\text{Hva blir } h: B-h = \frac{K}{2} \left(1 - \frac{1}{R}\right) = \frac{K}{2} \frac{R-1}{R}$$

$$\Rightarrow h = B - \frac{K}{2} \frac{R-1}{R} = \frac{K}{4R} (R^2-1) - \frac{K}{2R} (R-1)$$

$$= \frac{K}{4R} (R^2-1-2R+2) = \frac{K}{4R} (R^2-2R+1) = \frac{K}{4R} (R-1)^2$$

Andel i stabil v  kst av bestanden

$$\frac{h}{B} = \frac{\frac{K}{4R} (R-1)^2}{\frac{K}{4R} (R^2-1)} = \frac{(R-1)^2}{R^2-1} = \frac{(R-1)^2}{(R-1)(R+1)} = \frac{R-1}{R+1}$$

Likvekt for CO₂-rensing:

Modell:

$$M_{t+1} = M_t + \alpha E_{BAU}(t) (1 - a(t)) - \delta (M_t - M_{-\infty})$$

Ønsker en likvekt hvor M_t er konstant, $M_t = M$

$$E_{BAU}(t) = E$$

$$a(t) = a$$

~~$$M = M + \alpha E (1 - a) - \delta (M - M_{-\infty})$$~~

$$\alpha E (1 - a) = \delta (M - M_{-\infty})$$

$$(1 - a) = \frac{\delta (M - M_{-\infty})}{\alpha E}$$

$$a = 1 - \frac{\delta}{\alpha E} (M - M_{-\infty})$$

Vanskeligt å
estimere

Hva skjer ellers: Oblig legges ut i dag (i morgen)

Frist: 16. april

Regel: Alle som leverer får poeng, men alle må levere!