

Differensialligninger

En førsteordens diff. lign.

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (*)$$

y er en løsning af $(*)$ på et interval I dersom $(*)$ er opfyldt for alle $t \in I$.

Eksempel: $y'(t) = \frac{y(t)}{2t}$

Prøver at $y(t) = \sqrt{t}$ er en løsning på intervallet $(0, \infty)$.

Spekter: Vs. $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

Hs: $\frac{y(t)}{2t} = \frac{\sqrt{t}}{2t} = \frac{\cancel{\sqrt{t}}}{2\cancel{\sqrt{t}}\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

Opå $y(t) = \underline{D\sqrt{t}}$ er en løsning for alle D .

Hvis vi i tillegg kræver at $y(t_0) = y_0$

for vi at $D\sqrt{t_0} = y_0 \Rightarrow D = \frac{y_0}{\sqrt{t_0}}$

Et initialværdiproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad y(0) = y_0$$

har en enbetydning ^{løsning} på et interval $[0, a)$

dersom det findes én og kun én løsning på intervallet fra $[0, a]$ såkaldt at $y(0) = y_0$

Autonome ligninger: $y'(t) = f(y(t))$

Definition: f er Lipschitz-kontinuerlig i et område D dersom det findes en konstant K såkaldt at $|f(u) - f(v)| \leq K|u - v|$.

Teorem: Det autonome initialværdiproblem

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = y_0$$

der f er Lipschitz-kontinuerlig i et åbent interval D og $y_0 \in D$ har en enbetydning løsning på et interval $[0, a)$.

Eksempel: $y'(t) = \frac{3}{2} y(t)^{1/3}$ $y(0) = 0$

En løsning: $y_1(t) = 0$ $f(y) = \frac{3}{2} y^{1/3}$

Men $y_2(t) = t^{3/2}$ er også en løsning

Spekter: Vs: $y_2'(t) = \frac{3}{2} t^{1/2}$

Hs: $\frac{3}{2} y_2(t)^{1/3} = \frac{3}{2} (t^{3/2})^{1/3} = \frac{3}{2} t^{1/2}$

Eksempel: $y'(t) = y^2(t)$ $y(0) = \frac{1}{y_0}$
 $y_0 \neq 0$

Løsning $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$

Spekter: $y'(t) = -\frac{1}{(\frac{1}{y_0} - t)^2} (-1) = \frac{1}{(\frac{1}{y_0} - t)^2}$

$$y^2(t) = \frac{1}{(\frac{1}{y_0} - t)^2}$$

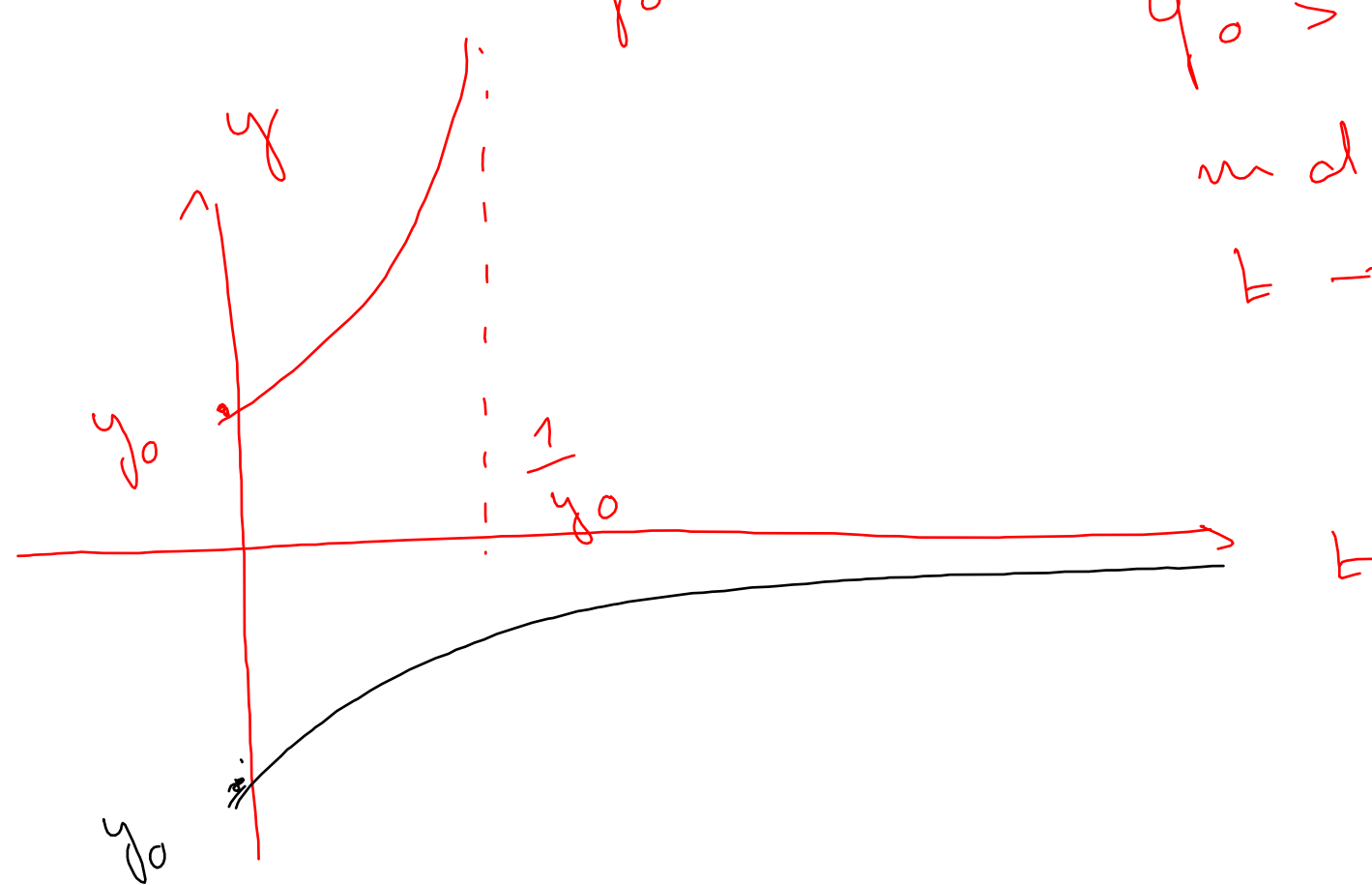
og $y(0) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - 0} = \frac{1}{\frac{1}{y_0}} = \underline{y_0}$

Hvor lange lever løsningene?

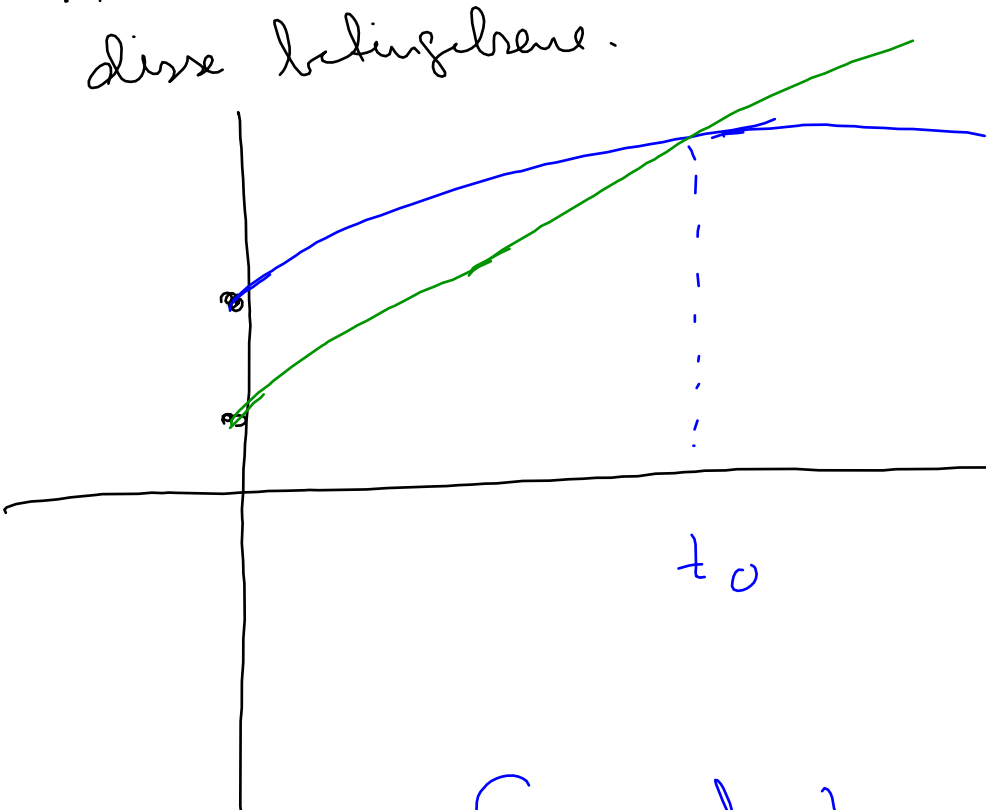
$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$$

$y_0 < 0$: løsningen for alle t

$y_0 > 0$: løsningen med ∞ når $t \rightarrow \frac{1}{y_0}$



Årder fra nå av at ligningene tilfredstiller disse betingelsene.

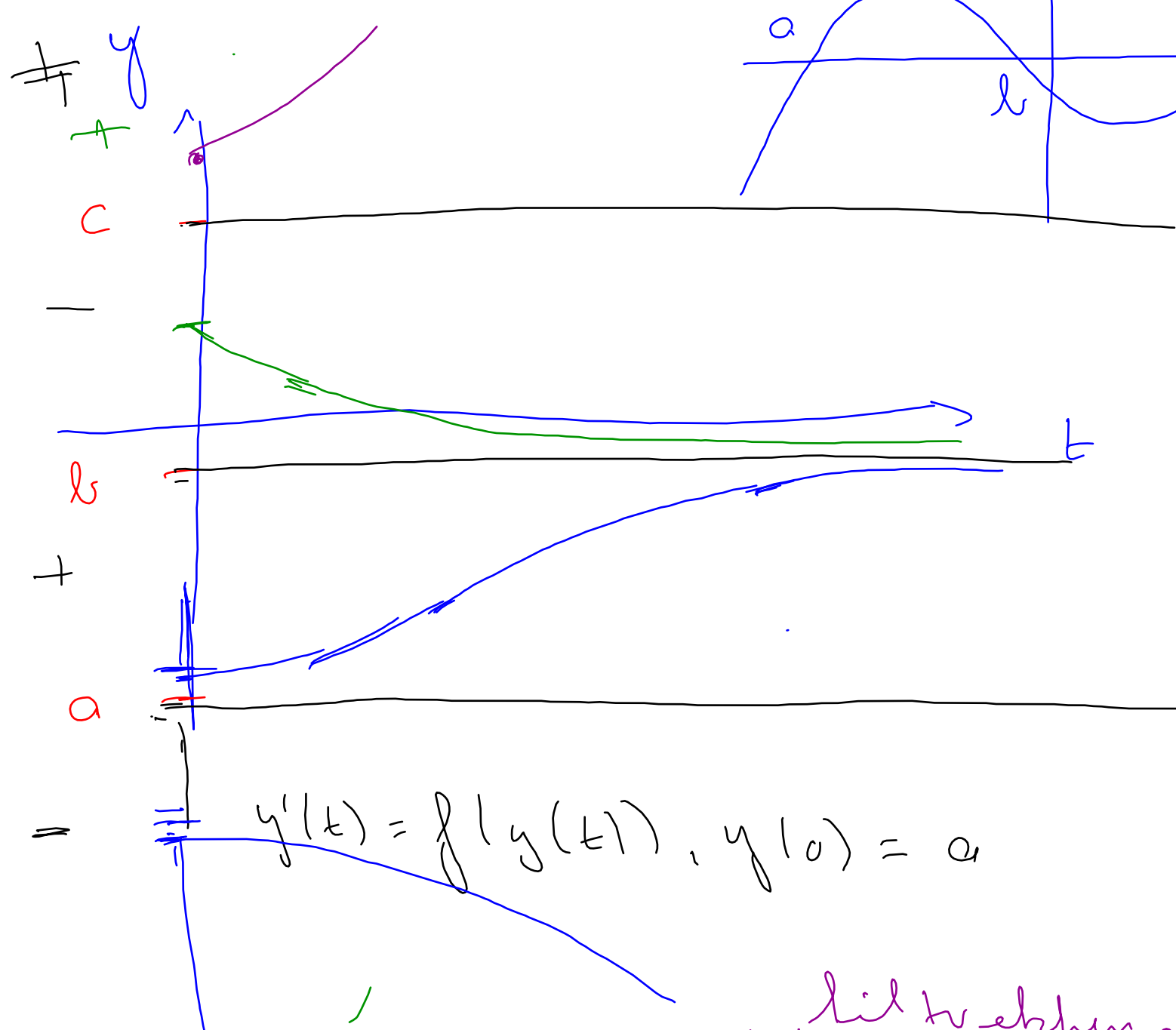


Er dette mulig?
Nei, løsningene kan ikke kryssa hverandre.

Geometrisk analyse

$$y'(t) = f(y(t))$$

Se på funksjon til f :

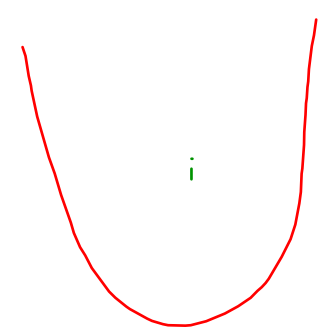


$$y'(t) = f(y(t)), y(0) = a$$

tiltrekker de

Likningspunkter: $a, b, \text{ og } c$

frastøtende

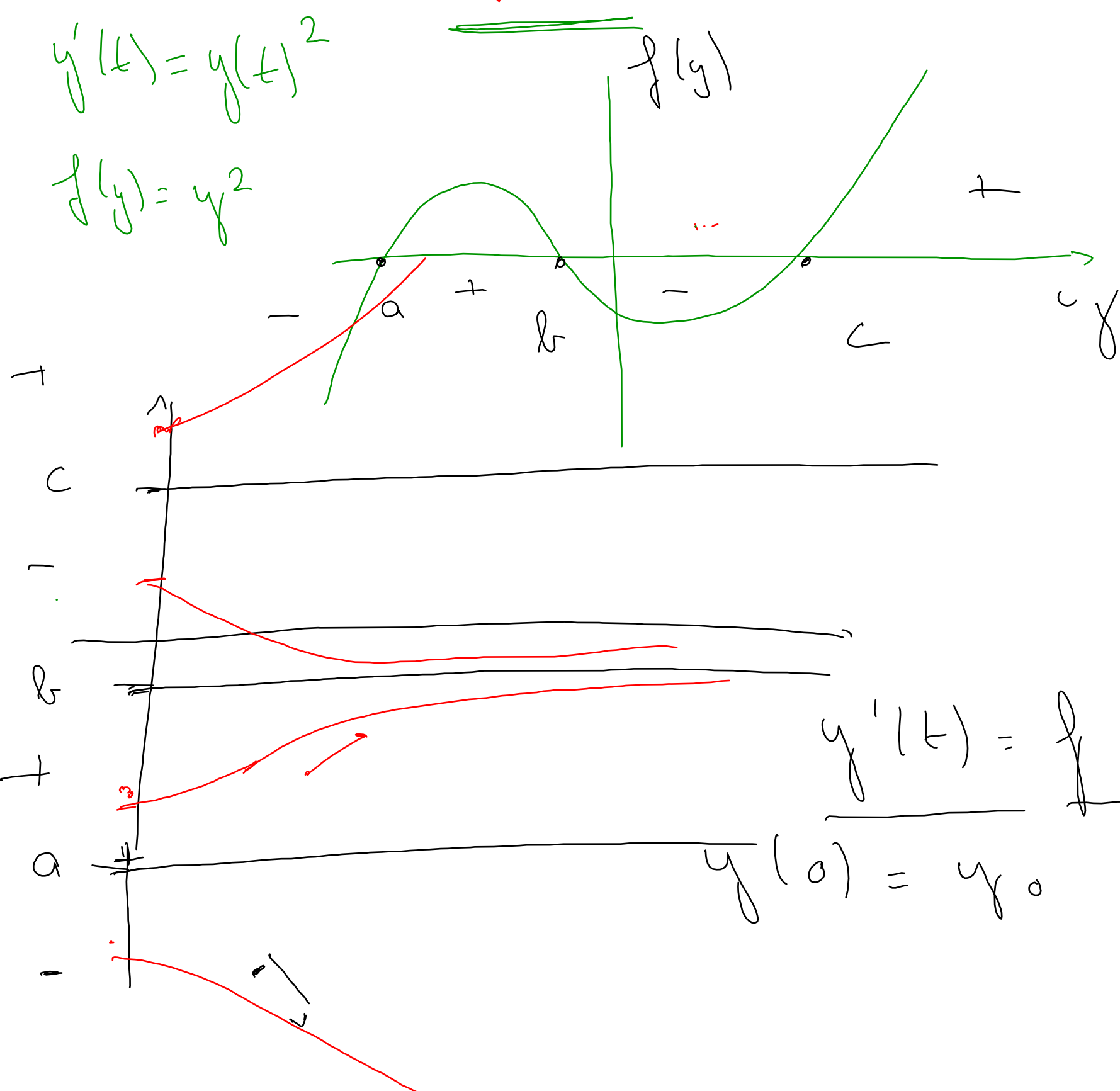


En gang til:

$$y'(t) = \underbrace{f(y(t))}_{f(y)} \quad y(0) = y_0$$

$$y'(t) = y(t)^2$$

$$f(y) = y^2$$



$$y'(t) = f(y(t))$$

$$y(0) = y_0$$

Analytische Lösungen

$$y'(t) = f(y(t))$$

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'(t)}{f(y(t))} dt = \int 1 dt = t + C$$

Stellen variable: $u = y(t)$, $du = y'(t) dt$

$$\int \frac{y'(t)}{f(y(t))} dt = \int \frac{du}{f(u)} = K(u) + D = K(y(t)) + D$$

Also $K(y(t)) + D = t + C$

$$K(y(t)) = t + C'$$

Lösung der $y(t)$

Beispiel: $y'(t) = y(t)^2$

$$\frac{y'(t)}{y(t)^2} = 1$$

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)^2} dt = \int 1 dt = t + C$$

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)^2} dt$$

$$u = y(t)$$

$$du = y'(t) dt$$

$$= \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + D =$$

$$= -\frac{1}{y(t)} + D$$

Also $-\frac{1}{y(t)} + D = t + C$

$$-\frac{1}{y(t)} = t + K$$

$$-y(t) = \frac{1}{t + K}$$

$$y(t) = -\frac{1}{t + K}$$

Das $y(0) = y_0$: $y_0 = -\frac{1}{0 + K} = -\frac{1}{K}$

$$K = -\frac{1}{y_0}$$

$$y(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{y_0}} = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$$

$$y'(t) = y(t)^2$$

$$f(y) = y^2$$

