

Optimal innhösting av fornybar resurs

Bestand: $B_{t+1} = RB_t$ $R > 1$

Nyttefunksjon: $L(u)$ konkar, $L'(u)$ er anlagende

Utløst: $L(u(0)) + \rho L(u(1)) + \rho^2 L(x_2)$

Anlagende: $R = \frac{1}{\rho}$, $\rho = \frac{1}{R}$

Anta at i t i tid 1 og at bestanden er x . Hvis vi tar ut u , så vil nytten være

$$\rho L(u) + \rho^2 L(R(x-u))$$

Vi vil finne u en som optimerer dette uttrykket:

$$f(u) = \rho L(u) + \rho^2 L(R(x-u))$$

Deriver: $f'(u) = \rho L'(u) + \rho^2 L'(R(x-u))(-R)$ $R\rho = 1$

$$= \rho L'(u) - \rho L'(R(x-u)) = \rho (L'(u) - L'(R(x-u)))$$

Finne maksimum når $L'(u) = L'(R(x-u))$. Siden L' er strengt anlagende, må vi ha $u = R(x-u) = Rx - Ru$. Dette gir

$$(1+R)u = Rx \Rightarrow u = \frac{R}{R+1} x$$

Vi sikrer da igjen $x-u = \frac{R+1}{R+1}x - \frac{R}{R+1}x = \frac{x}{R+1}$

Verdifunksjonen blir:

$$V_1(x) = \rho L\left(\frac{R}{R+1}x\right) + \rho^2 L\left(\frac{Rx}{R+1}\right) = (\rho + \rho^2) L\left(\frac{Rx}{R+1}\right)$$

Neste skritt: Anta at i ved tiden 0, har en bestand på x .

Hvis vi høster inn u , så

$$L(u) + V_1(R(x-u)) = L(u) + (\rho + \rho^2) L\left(\frac{R^2}{R+1}(x-u)\right)$$

Ønsker å velge u slik at dette uttrykket blir så stort mulig:

$$L(u) + (\rho + \rho^2) L\left(\frac{R^2}{R+1}(x-u)\right)$$

Deriver: $g'(u) = L'(u) + (\rho + \rho^2) L'\left(\frac{R^2}{R+1}(x-u)\right)\left(-\frac{R^2}{R+1}\right)$

$$= L'(u) - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}\right) L'\left(\frac{R^2}{R+1}(x-u)\right) \frac{R^2}{R+1}$$

$$= L'(u) - \frac{R+1}{R^2} L'\left(\frac{R^2}{R+1}(x-u)\right) \frac{R^2}{R+1}$$

$$= L'(u) - L'\left(\frac{R^2}{R+1}(x-u)\right)$$

Ønsker $g'(u) = 0$, dvs $L'(u) = L'\left(\frac{R^2}{R+1}(x-u)\right)$

Gjør må $u = \frac{R^2}{R+1}(x-u) \Rightarrow u + \frac{R^2}{R+1}u = \frac{R^2}{R+1}x \quad |R+1$

$$(1+R+R^2)u = R^2x \Rightarrow u = \frac{R^2}{1+R+R^2}x$$

Hva er den optimale verdien

$$V_0(x) = L\left(\frac{R^2}{1+R+R^2}x\right) + (\rho + \rho^2) L\left(\frac{R^2}{R+1}(x-u)\right)$$

$$= L\left(\frac{R^2}{1+R+R^2}x\right) + (\rho + \rho^2) L\left(\frac{R^2}{1+R+R^2}x\right)$$

$$= (1+\rho+\rho^2) L\left(\frac{R^2}{1+R+R^2}x\right)$$

Hva er gjennomsnittlig bestand eller uttak:

$$x-u = x - \frac{R^2}{1+R+R^2}x = \frac{1+R+R^2}{1+R+R^2}x - \frac{R^2}{1+R+R^2}x = \frac{1+R}{1+R+R^2}x$$

Bestanden ved begynnelsen av år 1:

$$R(x-u) = \frac{(1+R)R}{1+R+R^2}x$$

Hva mye vil vi høste i år 1? $\frac{R}{R+1} \left(\frac{(1+R)R}{1+R+R^2} \right) x$

$$= \frac{R^2}{1+R+R^2}x$$

samm uttak som i år 0

Optimalt uttak: Fast heste
mest er.

Oppgave 1: Lineær modell: $B_{t+1} = g(B_t) = RB_t$ $R > 1$

Gitt et bestanden av B , hva kan vi håpe for å holde den konstant:

$$B = R(B - h) \Rightarrow B = RB - Rh \Rightarrow Rh = RB - B \\ \Rightarrow h = \frac{(R-1)B}{R}$$

Profittfunksjon:

$$P(h) = ph - qh^2$$

Hvis vi holder bestanden på nivå B , da vil $h(B) = \frac{R-1}{R} B$,

$$f(B)^o q = P(h(B)) = p \frac{R-1}{R} B - q \frac{(R-1)^2}{R^2} B^2$$

Deriver $f(B)$:

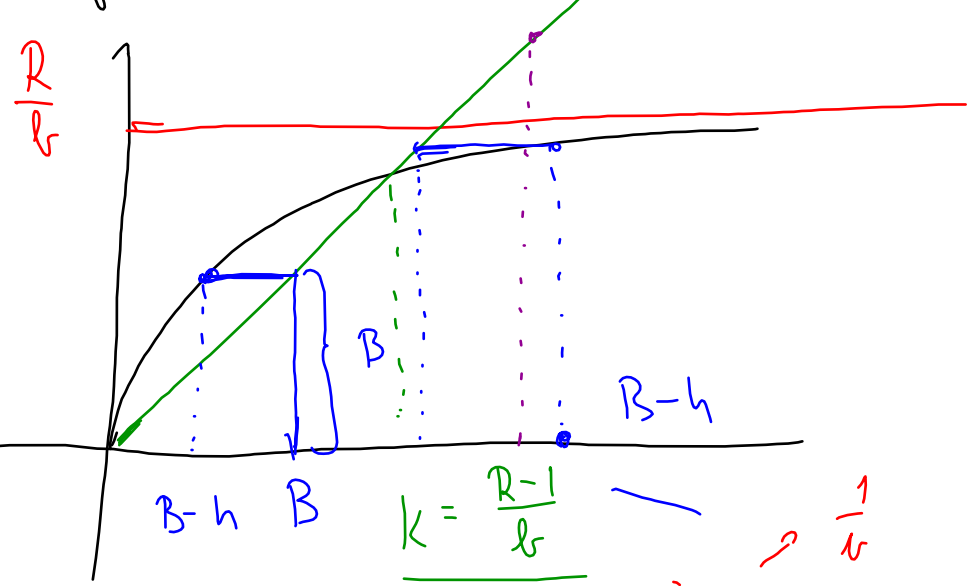
$$f'(B) = p \frac{R-1}{R} - q \frac{(R-1)^2}{R^2} 2B$$

Deriver $f'(B) = 0$; der: $p \frac{R-1}{R} = q \frac{(R-1)^2}{R^2} 2B$

$$2q \frac{R-1}{R} B = p \Rightarrow B = \frac{Rp}{2q(R-1)}$$

Oppgave 2: Barabási-Albert: $B_{t+1} = \frac{RB_t}{1+bB_t}$

$g(B) = \frac{RB}{1+bB}$



Hvor mye kan vi få
for å holde betanden
konstant på B

$$B = g(B-h) = \frac{R(B-h)}{1+b(B-h)}$$

Løser ligningen

$$B + bB^2 - bBh = RB - Rh$$

$$B + bB^2 - RB = (bB - R)h$$

$$h = \frac{B + bB^2 - RB}{bB - R}$$

$$= B + \frac{B}{bB - R}$$

Alltså $h(B) = B + \frac{B}{bB - R}$

Ønsker å finne B som
maksimerer

$$P(h) = ph - qh^2$$

$$g(B) = p(h(B)) = ph(B) - qh(B)^2$$

Ønsker å maksimere $g(B)$:

$$g'(B) = p h'(B) - 2qh(B)h'(B) = \underline{(p - 2qh(B))h'(B)}$$

Vi ser at $g'(B)$ kan bli 0 på måter

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad h(B) = \frac{p}{2q} \\ \text{(ii)} \quad h'(B) = 0 \end{array} \right\}$$

Hvis $\frac{p}{2q} > B_{\max}$, så vil
ikke ligning $h(B) = \frac{p}{2q}$ ha noen
løsning, så det eneste nullpunktet
til $g'(B) = 0$ er $B_{\max}$

Hvis $\frac{p}{2q} < B_{\max}$, vil det være
to punkter B_1 og B_2 der

$$(p - 2qh(B)) = 0$$

Dette betyr at $g'(B)$ har
tre nullpunkter $B_1 < B_{\max} < B_2$

Følgeskjema

	B_1	$B_{\max}$	B_2
$p - 2qh(B)$	0	-	0
$h'(B)$	-	0	-
$g'(B)$	0	0	0
	Lok maks	Lok min	Lok maks

$$g'(B) = (p - 2qh(B))h'(B)$$

La oss sammenligne verdier i B_1 og B_2 . $\rightarrow$ legger haken

$$\text{er } p - 2qh(B) = 0 \Rightarrow h(B) = \frac{p}{2q}, \text{ der}$$

$$h(B_1) = \frac{p}{2q}, h(B_2) = \frac{p}{2q}$$

Dette gir samme utlytte:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= ph(B_1) - qh(B_1)^2 = p \frac{p}{2q} - q \left(\frac{p}{2q} \right)^2 \\ &= \frac{p^2}{2q} - \frac{p^2}{4q} = \underline{\underline{\frac{p^2}{4q}}} \end{aligned}$$

Oppsummering:

(i) For $\frac{p}{2q} > h_{\max}$, så blir i følge $B = B_{\max}$

(ii) For $\frac{p}{2q} < h_{\max}$, så blir i følge $B = B_1$ eller $B = B_2$

Men hva er din størrelse?

(i) $B_{\max}$ = maksimumspunktet til $h(B)$ mellom 0 og k ,
der løsningen av $h'(B) = 0$ i dette intervall

(ii) B_1 og B_2 er løsningene av $h(B) = \frac{p}{2q}$.

Ser på (i): $h(B) = B + \frac{B}{bB - R}$

$$h'(B) = 1 + \frac{1(bB - R) - B(b)}{(bB - R)^2} = 1 - \frac{R}{(bB - R)^2}$$

$$\text{Finner } B_{\max}: \frac{R}{(bB - R)^2} = 1 \Rightarrow (bB - R)^2 = R \Rightarrow (bB - R) = \pm \sqrt{R}$$

$$B = \frac{R \pm \sqrt{R}}{b}$$

$$\text{vi velger } B = \frac{R - \sqrt{R}}{b}$$

Ser på (ii): $h(B) = \frac{p}{2q}$ der

$$B + \frac{B}{bB - R} = \frac{p}{2q} \quad | \cdot (bB - R)$$

$$bB^2 - \underline{BR} + B = \frac{pb}{2q}B - \frac{pR}{2q}$$

$$bB^2 - (R + \frac{pb}{2q} - 1)B + \frac{pR}{2q} = 0 \quad \text{— Løsninger } B_1 \text{ og } B_2$$

