

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1020 — Matematikk og bærekraftig forvaltning

Eksamensdag: Torsdag 15. august, 2024

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle oppgaver teller likt i vurderingen.

Oppgave 1

a

Du har solpaneler på et tak, der du har fått oppgitt kapasitetsfaktor til panelene i såkalt *peak hour*. Diskuter hvordan du kan regne ut den *daglige* kapasitetsfaktoren til dine paneler?

b

En batterifabrikk eier en vindpark og en solpark som sammen genererer strøm til fabrikken. Fabrikken krever daglig P MWh med strøm. det er installert V MW med vindmøller. Vindparken har en daglig kapasitetsfaktor på c_V , mens solcellepanelene har daglig kapasitetsfaktor c_S . Finn et uttrykk for kapasiteten S til solparken som må til for å dekke strømbehovet til fabrikken. I praksis, tror du at fabrikken alltid vil ha sitt behov for strøm dekket?

Oppgave 2

Tenk deg at du forvalter et aksjefond med investeringer bredt over alle aksjer på børsen, inkludert store internasjonale oljeselskap. Du vil gjerne endre fondet til å bli mer grønt ved å ta ut oljeaksjene fra fondet, men samtidig behold fondets forventete avkastning. Bruk Markowitz' porteføljeteori til å analysere hva som vil skje med fondets risiko. Vil det være større eller mindre sannsynlighet for å tjene masser penger i det grønne fondet sammenlignet med fondet der du eier oljeaksjer?

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

I kurset og i den obligatoriske oppgaven drøftet vi problemet med å installere fornybar kraft slik at produksjonen avvek minst mulig fra etterspørselen. Vi kom frem til optimeringsproblemet

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top C \mathbf{w} + (\mathbf{w}^\top \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mu}_E)^2 + \text{Var}(E), \quad \text{gitt} \quad \mathbf{w} \geq 0$$

a

Hva er $\mathbf{w}$, C , $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mu}_E$, og $\text{Var}(E)$? Hvorfor har vi kravet $\mathbf{w} \geq 0$?

b

Hvis vi tar vekk kravet $\mathbf{w} \geq 0$ vil vi ha at de deriverte med hensyn på koordinatene i vektoren $\mathbf{w}$ blir vektoren

$$\nabla L(\mathbf{w}) = 2C\mathbf{w} + 2(\mathbf{w}^\top \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mu}_E)\hat{\mathbf{r}}$$

der

$$L(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^\top C \mathbf{w} + (\mathbf{w}^\top \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mu}_E)^2 + \text{Var}(E)$$

Vis at

$$\bar{\mathbf{w}} = \hat{\mu}_E (C + \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^\top)^{-1} \hat{\mathbf{r}}$$

løser optimeringsproblemet der sidebetingelsen $\mathbf{w} \geq 0$ ikke er med.

Oppgave 4

Du kan høste fra en fornybar ressurs som regenererer seg med en vekstrate $r > 0$. Hvis du høster $h(t)$ på tid t , vil ressursen endre seg etter regenerering til

$$B(t+1) = (1+r)(B(t) - h(t))$$

der $B(t)$ er bestanden på tiden t . Innhøstingen må tilfredsstille $0 \leq h(t) \leq B(t)$ for alle tidspunkter. Hvor stor andel kan du høste fra denne bestanden i hver tidsperiode slik at bestanden sikres en vekstrate d , der $0 < d < r$?

Oppgave 5

I en enkel klimamodell finner vi at energien (det vil si, energi per tid) som stråler inn fra sola er

$$E_{inn} = \pi R^2 S (1 - \alpha)$$

der S er energiflukstettheten fra sola, R er jordas radius og α er albedo-effekten. Jorda stråler ut energi etter hvor varm den er,

$$E_{ut} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \epsilon$$

der T er jordas gjennomsnittstemperatur og ϵ er hvor mye av energiestrålingen som fanges av drivhusgasser. Her er σ en proporsjonalitetsfaktor, mens både α og ϵ har verdier mellom null og 1.

(Fortsettes på side 3.)

a

Hva skjer med jordas gjennomsnittstemperatur hvis $E_{inn} > E_{ut}$? Når er gjennomsnittstemperaturen i likevekt? Skriv et uttrykk for denne likevektstemperaturen.

b

Man kan anta at temperaturen T er en funksjon av tiden t . En enkel modell for $T(t)$ er

$$T'(t) = k(E_{inn} - E_{ut})$$

der k er en positiv proporsjonalitetsfaktor og $T'(t) = dT(t)/dt$ (den deriverte av $T(t)$ med hensyn på tiden). En forenkling av denne modellen finner vi ved å la $E_{ut} = 4\pi R^2 \sigma T(t) \epsilon$. Bruk den forenklete E_{ut} til å vise at

$$T(t) = T_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})$$

når du vet at temperaturen på tiden $t = 0$ er gitt ved $T(0) = T_0$. Her har vi satt $a = k\pi R^2 S(1 - \epsilon)$ og $b = k4\pi R^2 \sigma \epsilon$. Hva skjer med $T(t)$ når $t \rightarrow \infty$?

Oppgave 6

Du forvalter en fornybar ressurs som regenerer med en rate $r > 0$. Hvis du høster $h(t)$ på tid t , vil ressursen endre seg i følge dynamikken

$$B(t+1) = (1+r)(B(t) - h(t))$$

der $B(t)$ er bestanden på tiden t . Vi har at $B(0) = B$. Innhøstingen må tilfredsstille $0 \leq h(t) \leq B(t)$ til ethvert tidspunkt. Anta at du har en nyttefunksjon $L(h) = \sqrt{h}$, og diskonteringsfaktoren er $\rho \in (0, 1)$.

Finn den optimale innhøstingsstrategien $h^*(0)$ og $h^*(1)$ som maksimerer

$$\max_{h(0), h(1)} \sqrt{h(0)} + \rho \sqrt{h(1)} + \rho^2 \sqrt{B(2)}.$$

Du trenger ikke å godtgjøre at du har funnet maksimumspunkt i dine analyser.

SLUTT

(Fortsettes på side 4.)