

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1020 — Matematikk og bærekraftig forvaltning

Eksamensdag: KOnTe, vår 2025

Tid for eksamen: XX.00 – YY.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle oppgaver teller likt i evalueringen.

Oppgave 1

Du har installert et solcellepanel på taket av huset ditt i Oslo. Du vet at om sommeren vil panelet ha en kapasitetsfaktor på 0,3 i snitt over de timene det er sol, mens på vinteren er kapasitetsfaktoren 0,2 i de timene det er sol. Hvor mye strøm produserer solcellepanelet ditt 22. juni, da sola står opp klokka 4 på morgenen og går ned klokka 23 på kvelden? Hva med 22. desember, da sola står opp klokka 9.30 på morgenen, og går ned klokka 15 på ettermiddagen?

Oppgave 2

Du har i mange år styrt et stort fond som har investert kun i såkalte grønne aksjer. Noen av eierne har nettopp vunnet en rettsak som krever at fondet skal investere bredt i alle aksjer i markedet. Utifra porteføljeteorien til Markowitz, forklar med ord og grafiske illustrasjoner hva konsekvensene av rettens avgjørelse vil ha på fondets forventete avkastning og risiko.

Oppgave 3

Du kan høste fra en fornybar ressurs som regenerer seg med en faktor $4/3$. Hvis du høster $h(t)$ på tid t , vil ressursen endre seg etter regenerering til

$$B(t+1) = \frac{4}{3}(B(t) - h(t))$$

der $B(t)$ er bestanden på tiden t . Innhøstingen må tilfredsstille $0 \leq h(t) \leq B(t)$ for alle tidspunkter. Du ønsker å finne en innhøstingsstrategi som maksimerer nåverdien av din nytte. La diskonteringsfaktoren være $1/2$, mens nyttefunksjonen er $L(h) = \sqrt{h}$. Du starter ut med $B(0) = B$, og har

(Fortsettes på side 2.)

muligheter til å høste på tidspunktene $t = 0$ og $t = 1$ (det vil si, $T = 2$). Du skal finne en optimal innhøstingsstrategi som maksimerer

$$\max_{0 \leq h(0) \leq B, 0 \leq h(1) \leq B(1)} \sum_{s=0}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^s \sqrt{h(s)} + \frac{1}{4} \sqrt{B(2)} \quad (1)$$

a

Hva er verdifunksjonen på tidspunktene $t = 0, 1, 2$, altså hva er $V(0, B)$, $V(1, B)$ og $V(2, B)$?

b

Finn optimal innhøstingsstrategi $h^*(0)$ og $h^*(1)$ som løser optimeringsproblemet i uttrykk (1) ved hjelp av det dynamiske programmeringsprinsippet. Du trenger ikke å godtgjøre at du har maksimumspunkt i dine regninger.

c

Hvis du starter ut med en bestand $B = 100$, hvor mye høster du på tidene $t = 0$ og $t = 1$ og hvor mye $B(2)$ lar du være igjen til neste generasjon hvis du agerer optimalt.

Oppgave 4

Anta at du vil installere vindkraftverk i Norge som gir mest mulig stabil produksjon av strøm. Du løser det kvadratiske minimeringsproblemet

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top C \mathbf{w} + (\mathbf{w}^\top \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mu}_E)^2 + \text{Var}(E), \quad \text{gitt} \quad \mathbf{w} \geq 0$$

og finner

$$\bar{\mathbf{w}} = \hat{\mu}_E (C + \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}^\top)^{-1} \hat{\mathbf{r}}$$

der $\bar{\mathbf{w}}$ er positiv i alle sine koordinater.

a

Regn ut den minimale kvadratiske variasjonen mellom produksjon og etterspørsel hvis du installerer $\bar{\mathbf{w}}$.

b

Tenk deg at du har tre lokasjoner du kan installere vindkraft. Du har analysert problemet over, og funnet at $\bar{\mathbf{w}}^\top = (15, 30, 10)$. Forventete kapasitetsfaktorer har du funnet til å være henholdsvis 0,2 i lokasjon 1, 0,4 i lokasjon 2 og 0,1 i den siste lokasjonen. Hva blir den forventete produksjonen?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5

Vi minner om den enkle klimamodellen vi lærte i kurset. Energien (det vil si, energi per tid) som stråler inn fra sola er

$$E_{inn} = \pi R^2 S(1 - \alpha)$$

der S er energiflukstettheten, R er jordas radius og $0 < \alpha < 1$ er albedo-effekten. Jorda stråler ut energi utifra hvor varm den er,

$$E_{ut} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \epsilon$$

der T er jordas gjennomsnittstemperatur og $0 < \epsilon < 1$ er hvor mye av energiutstrålingen som fanges av drivhusgasser. σ er en proporsjonalitetsfaktor.

Beskriv hva vi må gjøre for at parameteren for drivhusgass ϵ minker. Hva vil skje med jordas gjennomsnittstemperatur hvis ϵ minker?

Oppgave 6

Du kan høste fra en fornybar ressurs som regenerer seg med en vekstrate $r > 0$. Hvis du høster $h(t)$ på tid t , vil ressursen endre seg etter regenerering til

$$B(t+1) = (1+r)(B(t) - h(t))$$

der $B(t)$ er bestanden på tiden t . Innhøstingen må tilfredsstille $0 \leq h(t) \leq B(t)$ for alle tidspunkter. Hvor stor andel kan du høste fra denne bestanden i hver tidsperiode slik at den vokser med en rate $r/2$?

SLUTT

(Fortsettes på side 4.)