

LÖSNINGSFÖRSLAG EKSAMEN V 2025

1

Hver time vil 1 vindmølle i parken

producere $7 \text{ MW} \cdot 0,6 \cdot 1 \text{ h} = \frac{7 \cdot 6}{10} \text{ MWh} = 4,2 \text{ MWh}$

Du har 10 vindmøller, så totalt vil du producere $10 \cdot 4,2 \text{ MWh} = 42 \text{ MWh}$ med strøm i snitt over en time.

Vinden vil variere fra time til time, noe som betyr at kapasitetsfaktoren vil variere fra time til time. Kapasitetsfaktoren er hvor mye som produseres delt på hva som potensielt maksimalt kan produseres. Mye vind betyr høy produksjon, mens lite vind betyr lav produksjon. I praksis vil derfor vindparken produsere både mer og mindre enn 42 MWh . Men den kan aldri produsere mer enn 70 MWh ($= 7 \text{ MW} \cdot 1 \text{ h} \cdot 10$).

2

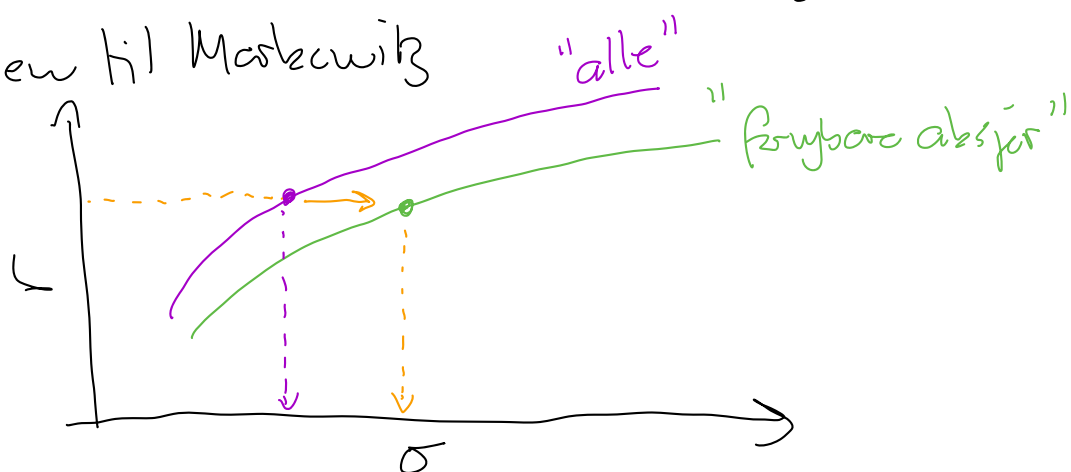
a)



Den effisiente portefølje kurten i Markowitz sin teori beskriver hva den minste risikoen den kan oppnå til en gitt forventet avkastning i markedet. Det finnes en portefølje som gir den minste risikoen til den gitte forventede avkastningen, og alle andre porteføljer i markedet med samme forventede avkastning må ha høyere risiko σ .

b)

Ved å begrense fondet til bare ha aksjer innen fornybar energi, vil gi høyere risiko hvis man ønsker samme forventede avkastning, i følge teorien til Markowitz



Eventuelt, må vi akseptere en lavere forventet
avkastning hvis vi vil ha samme risiko i portfel.

3

a) Fra definisjonen av verdifunksjoner vil

$V(2, B) = \rho^2 \sqrt{B}$, siden vi ved tid $t=2$ ($=T$)
ikke kan gjøre noe innhøsting.

Verdifunksjonen på tid $t=0$ er det optimale
kontrollproblem, igjen fra definisjonen:

$$V(0, B) = \max_{\substack{0 \leq h(0) \leq B \\ 0 \leq h(1) \leq B(1)}} \sum_{s=0}^1 \rho^s \sqrt{h(s)} + \rho^2 \sqrt{B(2)}$$

b) Det dynamiske programmeringsprinsippet sier
at (dette vet vi fra forelesninger/teori):

$$V(1, B) = \max_{0 \leq h(1) \leq B} \rho \sqrt{h(1)} + V(2, B(2))$$

og

$$V(0, B) = \max_{0 \leq h(0) \leq B} \sqrt{h(0)} + V(1, B(1))$$

c) Vi går "baklengs", og finner først $u(1)$:

Fra b) vet vi at

$$V(1, B) = \max_{0 \leq u(1) \leq B} f(\sqrt{u(1)} + V(2, B(2)))$$

$$\text{og } B(2) = R(B(1) - u(1)), \quad V(2, B(2)) = f^2 \sqrt{B(2)}$$

Innsatt i $V(1, B)$ får vi derfor

$$V(1, B) = \max_{0 \leq u(1) \leq B} f(\sqrt{u(1)} + f^2 \sqrt{R(B - u(1))})$$

$$= \max_{0 \leq u(1) \leq B} f(\sqrt{u(1)} + f^2 \sqrt{R} \sqrt{B - u(1)})$$

Vi definerer en funksjon

$$f(x) = f(\sqrt{x} + f^2 \sqrt{R} \sqrt{B - x})$$

og maksimerer denne:

$$f'(x) = f \frac{1}{2\sqrt{x}} + f^2 \sqrt{R} \frac{1}{2\sqrt{B-x}} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = f \sqrt{R} \frac{1}{\sqrt{B-x}} \Rightarrow x = \frac{1}{f^2 R} (B - x)$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{B}{1+f^2 R}$$

Siden $f^2 R > 0$ vil $0 < x^* < B$, og dermed finner vi at

$$h^*(1) = \frac{B(1)}{1+f^2 R}$$

NB! Vi trenger ikke å vite at x^* er et maksimum, i følge oppgaven.

Vi går nå til h' ved $t=0$, for å finne $h^*(t)$:

Regner først ut $V(1, B)$:

$$V(1, B) = f \sqrt{h^*(1)} + f^2 \sqrt{R} \sqrt{B - h^*(1)}$$

$$= f \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{1+f^2 R}} + f^2 \sqrt{R} \sqrt{B - \frac{B}{1+f^2 R}}$$

$= \frac{(1+f^2 R)B - B}{1+f^2 R} = \frac{f^2 R}{1+f^2 R} \cdot B$

$$= f \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{1+f^2 R}} + f^2 \sqrt{R} \frac{f \sqrt{R}}{\sqrt{1+f^2 R}} \sqrt{B}$$

$$= f \sqrt{1+f^2 R} \sqrt{B}$$

Bruger dette til at finde $h^*(L)$ via $V(L, B)$ og
 dynamic programming for b)

$$\underline{V(L, B) = \max_{0 \leq h(L) \leq B} \sqrt{h(L)} + V(1, B/1)}$$

$$= \max_{0 \leq h(L) \leq B} \sqrt{h(L)} + \underbrace{f \sqrt{1+f^2 R}}_{= R(B-h(L))} \sqrt{B/1}$$

$$= \max_{0 \leq h(L) \leq B} \sqrt{h(L)} + f \sqrt{1+f^2 R} \sqrt{R} \sqrt{B-h(L)}$$

Definerer funktionen

$$f(x) = \sqrt{x} + f \sqrt{R} \sqrt{1+f^2 R} \sqrt{B-x}$$

og maksimer denne:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + f \sqrt{R} \sqrt{1+f^2 R} \frac{1}{2\sqrt{B-x}} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = f \sqrt{R} \sqrt{1+f^2 R} \frac{1}{\sqrt{B-x}} \Rightarrow x = \frac{1}{f^2 R (1+f^2 R)} (B-x)$$

$$\Rightarrow \underline{x^* = \frac{B}{1+f^2 R + f^4 R^2}} \quad \text{Igen, siden } f^2 R > 0 \text{ vil } 0 < x^* < B$$

vi finder

$$\underline{h^*(L) = \frac{B}{1+f^2 R + f^4 R^2}}$$

d) Vi bruker dynamikken samt strategien $h^*(1)$ og $h^*(1)$:

$$B(1) = R(B - h^*(1)) = R\left(B - \frac{B}{1 + f^2 R + f^4 R^2}\right)$$

$$= R \cdot B \frac{f^2 R + f^4 R^2}{1 + f^2 R + f^4 R^2}$$

$$B(2) = R(B(1) - h^*(1)) = R\left(B(1) - \frac{B(1)}{1 + f^2 R}\right)$$

$$\begin{aligned} &= R \frac{f^2 R}{1 + f^2 R} B(1) \\ &= R \frac{f^2 R}{\cancel{1 + f^2 R}} \cdot R \cdot B \cdot \frac{f^2 R + f^4 R^2}{1 + f^2 R + f^4 R^2} \\ &= R^2 \frac{f^4 R^2}{1 + f^2 R + f^4 R^2} \cdot B \end{aligned}$$

$\approx f^2 R (1 + f^2 R)$

4) Minimeringsproblemet ^{i d. lekasjoner} søker å finne den inklaspingen av fornybar kraft som minimerer den kvadratiske forskjellen mellom produksjon og etterspørsel. Vi ønsker med andre ord å ha minst mulig avvik mellom produksjon og etterspørsel, det vil si, mest mulig stabil produksjon nærmest etterspørselen.

V: antall d lokasjoner. $\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix}$ er en vektor

som beskriver hvor mye kapasitet vi inkluderer i hver lokasjon. $\underline{\hat{r}} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \vdots \\ \hat{r}_d \end{bmatrix}$ er vektoren av forventede kapasitetsfaktorer i hver lokasjon, mens

$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1d} \\ \vdots & & & \\ c_{d1} & \dots & c_{dd} \end{bmatrix}$ er varians-kovariansmatrisen

for kapasitetsfaktorene, med c_{ij} lite kovariansen til kapasitetsfaktorene i lokasjon i og j.

$\hat{\mu}_E$ er forventet etterspørsel, mens $\text{Var}(E)$ er variansen til etterspørselen.

5

Ved likevekt vil $\bar{E}_{inn} = \bar{E}_{ut}$

$$\Rightarrow \pi R^2 S(1-\alpha) = 4\pi R^2 \sigma T^4 \varepsilon$$

$$\Rightarrow 4\sigma T^4 \varepsilon = S(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow T^4 = \frac{S(1-\alpha)}{4\sigma\varepsilon} \Rightarrow \underline{\underline{T = \left(\frac{S(1-\alpha)}{4\sigma\varepsilon} \right)^{1/4}}}$$