

Kvalitativ teori for autonome differensialligninger

I dette notatet skal vi se litt på differensialligninger fra et geometrisk perspektiv, men aller først må vi vite litt om hva differensialligninger er og når de har løsninger.

1 Førsteordens differensialligninger

En førsteordens differensialligning er en ligning

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1)$$

der f er en gitt funksjon, og y er en ukjent funksjon som vi ønsker å finne. Vi sier at y er en løsning av (??) på et intervall I dersom

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

for alle $t \in I$. En differensialligning er altså en ligning der den ukjente er en funksjon og ikke et tall slik vi er vant til fra andre typer ligninger.

Eksempel 1. Hvis vi lar f være funksjonen $f(t, y) = 2ty$, blir ligningen $y'(t) = 2ty(t)$. Ved innsetting ser vi at $y(t) = e^{t^2}$ er en løsning på hele $\mathbb{R}$. Dette er imidlertid ikke den eneste løsningen; *alle* funksjoner $y_C(t) = Ce^{t^2}$, der C er en konstant, er løsninger av (??). Det er normalt for en differensialligning å ha uendelig mange løsninger, og det er en naturlig måte å skille dem på: Hvis vi velger en t -verdi, la oss si t_0 , ser vi at $y_C(t_0) = Ce^{t_0^2}$. Alle løsningene y_C har altså forskjellige verdier i t_0 . Dette leder til vårt neste begrep.

I et *initialverdiproblem* ønsker vi å løse en differensialligning $y'(t) = f(t, y(t))$ på et intervall $I = [t_0, t_0 + a)$ under en tilleggsbetingelse av typen $y(t_0) = y_0$, der $y_0 \in \mathbb{R}$. Hvis vi i eksemplet ovenfor velger $t_0 = 0$ og $y_0 = 3$, får vi løsningen $y(t) = 3e^{t^2}$. Vi skriver gjerne et slik initialverdiproblem som

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

Det viser seg at i de fleste tilfeller har et initialverdiproblem én og bare én løsning – en såkalt *entydig* løsning. I noen tilfeller kan vi finne en formel for denne løsningen (det finnes metoder for å gjøre dette i MAT1100, og vi skal se litt på én av dem på slutten av notatet), men i de fleste tilfeller finnes det ingen løsningsformel, og vi må nøye oss med å beskrive løsningene på andre måter. Det er dette vi skal studere på de neste sidene, men først skal vi se litt nøyere på når det finnes en entydig løsning.

For å slippe å si altfor mye om funksjoner av flere variable, skal vi nøye oss med å se på *autonome* differensialligninger. Dette er ligninger der høyresiden ikke avhenger eksplisitt av t , dvs. de er på formen

$$y'(t) = f(y(t)).$$

Slike ligninger er de eneste vi skal være interessert i når vi arbeider med klimamodeller.

Vi sier at funksjonen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er *Lipschitz-kontinuerlig* på et åpent intervall D dersom det finnes en konstant K slik at $|f(u) - f(v)| \leq K|u - v|$ for alle $u, v \in D$. Her er det grunnleggende eksistens- og entydighetsteoremet:

Teorem 1 *Anta at funksjonen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er Lipschitz-kontinuerlig på et åpent intervall D og at $y_0 \in D$. For enhver $t_0 \in \mathbb{R}$ finnes det et åpent intervall $I = [t_0, t_0 + a)$ slik at initialverdiproblemet*

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

har en entydig løsning på I .

Teoremet kan se litt kronglete ut, men det er en del ting vi må ta hensyn til. Hvis f bare er kontinuert, men ikke Lipschitz-kontinuerlig, kan entydigheten bryte sammen som dette eksemplet viser.

Eksempel 2. Initialverdiproblemet

$$y'(t) = \frac{3}{2}y(t)^{1/3}, \quad y(0) = 0$$

har løsning $y_1(t) = 0$, men også løsningen $y_2(t) = t^{3/2}$ (sjekk dette). Her er funksjonen $f(y) = \frac{3}{2}y^{1/3}$ kontinuert, men ikke Lipschitz-kontinuerlig.

Et annet problem er at løsningene kan “eksplodere” i den forstand at de går mot uendelig i endelig tid:

Eksempel 3. Løsningen til initialverdiproblemet

$$y'(t) = y(t)^2, \quad y(0) = y_0$$

for $y_0 \neq 0$ er

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$$

(sjekk dette!). Løsningen går mot uendelig når $t \rightarrow \frac{1}{y_0}$. Legg merke til at løsningens levetid avhenger av startbetingelsen y_0 – dess større y_0 er, dess kortere lever løsningen.

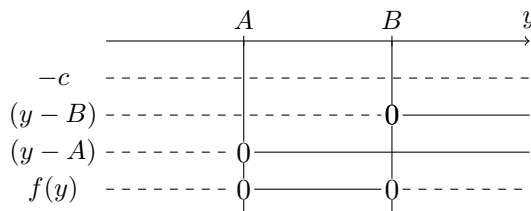
2 Geometrisk analyse

Vi antar nå at vi har en autonom ligning $y'(t) = f(y(t))$ som har en entydig løsning for alle initialbetingelser. Hva kan vi si om løsningene uten å regne dem ut? Nøkkelen er å se på fortegnet til f . Vi ser nemlig at hvis $y(t)$ er i et område der f er positiv, så vil $y'(t) = f(y(t))$ være positiv, dvs. at $y(t)$ er voksende. Tilsvarende vil $y(t)$ være avtagende når vi er i et område der f er negativ. Det er lettest å forstå ideen gjennom et eksempel.

Eksempel 4. Anta at c, A, B er reelle tall slik at $c > 0$, og $A < B$. Setter vi $f(y) = -c(y - A)(y - B)$, får vi den autonome ligningen

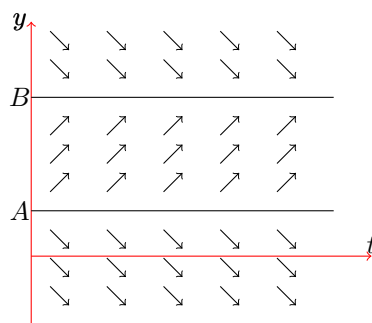
$$y'(t) = -c(y(t) - A)(y(t) - B).$$

Fortegnsskjemaet til $f(y)$ ser slik ut:



Figur 1: Fortegnsskjema for $f(y) = -c(y - A)(y - B)$

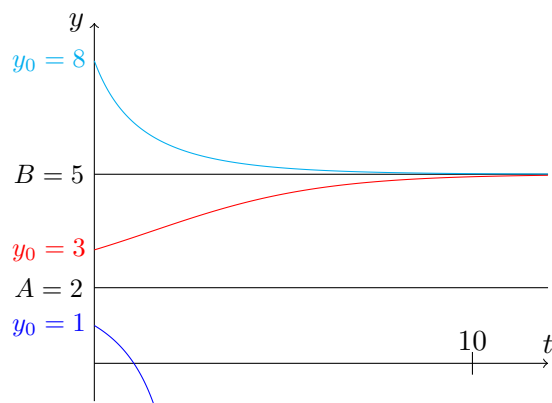
Vi ser altså at $f(y)$ er 0 når y er lik A eller B ; er positiv når y ligger mellom A og B ; og er negativ når y er mindre enn A eller større enn B . På figur ?? har jeg markert disse punktene på y -aksen:



Figur 2: Fasediagram for $y' = -c(y - A)(y - b)$

En løsning til differensialligningen $y'(t) = f(y(t))$ vil være voksende når den befinner seg i et område der pilene peker oppover og avtagende når den befinner seg i et område der pilene peker nedover. Figur ?? nedenfor viser

hvordan dette slår ut på løsningene: Velger vi en startverdi y_0 mellom A og B , vokser løsningen mot B ; velger vi en startverdi y_0 større enn B , avtar løsningen mot B ; og velger vi en startverdi y_0 mindre enn A , vil løsningen gå mot $-\infty$ i endelig tid. Dersom vi velger A eller B som startverdi, vil løsningen være konstant. Dette betyr at A og B er likevektspunkter, men det er en forskjell på dem. B er et *tiltrekkende* likevektspunkt – starter du i nærheten av B , vil løsningen bli trukket mot B . Starter du derimot i nærheten av A , vil løsningen bli skjøvet bort fra A , og dermed er A et *frastøtende* likevektspunkt. Man snakker også om *stabile* og *ustabile* likevektspunkter.



Figur 3: Løsninger av $y' = -c(y - A)(y - b)$ for $A = 2$, $B = 5$ og $c = 0.15$

Vi kan ta med erfaringene fra dette eksemplet videre. Anta at vi studerer en autonom differensialligning $y'(t) = f(y(t))$, der f har nullpunkter $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Da vil punktene c_i være likevektspunkter for f . Et slikt likevektspunkt vil være tiltrekkende om f bytter verdi fra positiv til negativ når y passerer c_i og frastøtende om fortegnet bytter fra negativt til positivt (hvorfor?). Dersom f ikke bytter fortegn i c_i , vil likevektspunktet være tiltrekkende fra den ene siden, men frastøtende fra den andre (prøv å finne ut hva dette betyr!).

3 Analytiske løsninger

I noen tilfeller er det mulig å løse autonome ligninger analytisk – dvs. finne en formel for løsningene. Det finnes en generell fremgangsmåte, men den fungerer bare hvis man er istand til å løse de integralene og ligningene man støter på underveis. Har du tatt MAT1100, vil du kjenne igjen metoden siden autonome ligninger er et spesialtilfelle av såkalte *separable* ligninger.

For å finne løsningene til den autonome ligningen

$$y'(t) = f(y(t))$$

deler vi først på $f(y(t))$:

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = 1.$$

Neste skritt er å integrere på begge sider

$$\int \frac{y'(t)}{f(y(t))} dt = \int 1 dt = t + C. \quad (3)$$

For å løse integralet på venstre side innfører vi en ny variabel $u = y(t)$. Da er $du = y'(t) dt$, og vi får

$$\int \frac{y'(t)}{f(y(t))} dt = \int \frac{1}{f(u)} du,$$

der vi i integralet til høyre må huske å sette inn $u = y(t)$ etter at vi har utført integrasjonen. Anta nå at vi kan løse integralet $\int \frac{1}{f(u)} du$ og få et svar $K(u) = \int \frac{1}{f(u)} du$. Da er

$$\int \frac{y'(t)}{f(y(t))} dt = K(y(t))$$

og setter vi dette inn i (??), får vi

$$K(y(t)) = t + C.$$

Hvis vi kan løse denne ligningen for $y(t)$, har vi funnet løsningene til differensialligningen.

Det kan være lettere å forstå fremgangsmåten fra et eksempel:

Eksempel 5. Vi skal finne løsningene til

$$y'(t) = y(t) - a$$

der a er en konstant. Vi deler først på $y(t) - a$ og får

$$\frac{y'(t)}{y(t) - a} = 1.$$

Integrasjon gir

$$\int \frac{y'(t)}{y(t) - a} dt = \int 1 dt = t + C,$$

der C kan være en hvilken som helst konstant. Hvis vi substituerer $u = y(t)$ i det gjenværende integralet, får vi $du = y'(t) dt$ og

$$\int \frac{y'(t)}{y(t) - a} dt = \int \frac{1}{u - a} du = \ln |u - a| + K = \ln |y(t) - a| + K.$$

Alt ialt har vi nå

$$\ln |y(t) - a| = t + C$$

(siden vi ikke trenger to integrasjonskonstanter, har jeg slått sammen C og K til én konstant). Vi løser for $y(t)$ ved først å observere at

$$|y(t) - a| = e^{\ln |y(t) - a|} = e^{t+C} = e^C e^t,$$

som gir $y(t) - a = \pm e^C e^t$, dvs. $y(t) = a \pm e^C e^t$. Siden C kan være en hvilken som helst konstant, kan e^C være en hvilken som helst positiv konstant, og dermed kan $D = \pm e^C$ være en hvilken som helst ikke-null konstant. Dermed har vi løsningen

$$y(t) = a + D e^t$$

der D er lik en hvilken som helst ikke-null konstant. Men hva er galt med $D = 0$? Dette valget gir $y(t) = a$, og innsetting i ligningen viser at dette også er en løsning (vi mistet den da vi delte med $y(t) - a$ innledningsvis). Den generelle løsningen er dermed $y(t) = a + D e^t$, der D er en hvilket som helst konstant. Ønsker vi løsningen der $y(0) = y_0$, viser en enkel regning at vi må velge $D = y_0 - a$, dvs. sette

$$y(t) = a + (y_0 - a)e^t.$$

Oppgaver

1. I denne oppgaven er $f(y) = y^3 - y$.
 - a) Lag et fortegnsskjema for f .
 - b) Lag et fasediagram for f av samme type som figur ??.
 - c) Lag en skisse (som figur ??) over hvordan du tror løsningene til initialverdiproblemet $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = y_0$, oppfører seg for forskjellige valg av startverdi y_0 . Hvilke likevektspunkter er tiltrekkende og hvilke er frastøtende?
 - d) Man kan vise at løsningene til differensialligningen er

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{y_0^2} - 1\right)e^{2t}}} & \text{for } y_0 > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{y_0^2} - 1\right)e^{2t}}} & \text{for } y_0 < 0 \\ 0 & \text{for } y_0 = 0 \end{cases}$$

Bruk dette og et dataprogram (eller en kalkulator) til å sjekke skissen du lagde i c).

- e) (for spesielt interesserte mestere i delbrøkoppspalting!) Vis formelene i d).

2. I denne oppgaven er $f(y) = y^2$.

- Lag et fortegnsskjema for f .
- Lag et fasediagram for f av samme type som figur ??.
- Lag en skisse (som figur ??) over hvordan du tror løsningene til initialverdi problemet $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = y_0$ oppfører seg for forskjellige valg av startverdi y_0 . Hvordan vil du beskrive likevektpunktet?
- Man kan vise at løsningene til differensialligningen er

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t} & \text{for } y_0 \neq 0 \\ 0 & \text{for } y_0 = 0 \end{cases}$$

Bruk dette til å sjekke skissen du lagde i c).

- e) Utled formelene i d).

3. Den generelle løsningen til differensialligningen i eksempel 4 er

$$y(t) = \frac{B(y_0 - A) - A(y_0 - B)e^{-c(B-A)t}}{(y_0 - A) - (y_0 - B)e^{-c(B-A)t}}$$

- Vis at formelen stemmer for $y_0 = A$ og $y_0 = B$.
 - Vis at hvis $y_0 < A < B$, så går løsningen $y(t)$ til $-\infty$ i endelig tid. Hvor lang tid tar det?
 - Vis at hvis $y_0 > A$, så er $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = B$ (husk at vi forutsetter at $B > A$ og $c > 0$).
 - (for spesielt interesserte mestere i delbrøkoppspalting!) Løs differensialligningen og vis at formelen i begynnelsen av oppgaven er riktig.
4. En mye brukt modell for veksten til en dyrestamme kalles *logistisk vekst*. Størrelsen $y(t)$ til bestanden etter t år oppfyller differensialligningen

$$y'(t) = ry(t)(B - y(t))$$

der r og B er positive konstanter (r kalles *den naturlige vekstraten* mens B kalles *bæreevnen*). Legg merke til at denne differensialligningen er et spesialtilfelle av differensialligningen i eksempel 4 og oppgave 3.

- Lag et fasediagram for $y(t)$ og skisser hvordan du tror løsningene ser ut.

- b) Løs differensialligningen og bruk en kalkulator eller et dataprogram til å plotte løsningene for ulike initialbetingelser. (Hvis du ikke vil løse ligningen selv, kan du bruke formelen i oppgave 3.)
5. La $f(y) = 3y - y^3$.
- a) Tegn grafen til f og finn lokale maksimums- og minimumspunkter.
- b) La $f_c(y) = f(y) + c = 3y - y^3 + c$. Drøft hvor mange og hva slags nullpunkter f_c har for ulike verdier av c (*Hint*: Det er lurer å tegne enn å regne). Hva skjer når c passerer -2 og 2 ?
6. Betrakt initialverdiproblemet

$$y'(t) = \frac{3}{2}y(t)^{1/3}, \quad y(0) = 0$$

i eksempel 2. Vis at for alle $a \geq 0$ er funksjonen

$$y_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t < a \\ (t - a)^{3/2} & \text{for } t \geq a \end{cases}$$

en løsning (husk å sjekke at differensialligningen er oppfylt i punktet $t = a$).

7. I denne oppgaven skal vi se nærmere på figur 4 i artikkelen om energibalansemodeller. I denne figuren kommer de to kurvene fra de to leddene på venstre side av ligning (5) i artikkelen, den S-formede kurven fra det første leddet, og den langsomt voksende kurven fra det andre leddet.
- a) Bruk en lommeregner eller et dataprogram til å gjenskape figuren (Det er bedre å bruke $\epsilon = 0.61$ enn $\epsilon = 0.66$ som er foreslått i artikkelen).
- b) Undersøk hva som skjer med figuren i a) når du endrer verdien til Q (ikke ta i for mye, til å begynne med holder det å endre Q med faktorer mellom 0.8 og 1.3). I hvilken grad understøtter undersøkelsene dine figur 5 i artikkelen?
- c) Gi Q den opprinnelige verdien og varier ϵ isteden (husk at ϵ er en parameter som gjenspeiler drivhuseffekten). Hvor store endringer må du gjøre for å oppnå samme type effekter som i b)?