

Løsning til oppgave om likevekt

I dette notatet skal vi se på løsningen til denne oppgaven:

Oppgave 3: Vi ser på en bestand som utvikler seg etter den logistiske modellen $g(B) = B + rB \left(1 - \frac{B}{K}\right)$.

- Finn den største verdien til $g(B)$.
- Hvor mye kan vi høste dersom vi ønsker å holde bestanden stabil, dvs. at den også er B til neste år? Hva skjer med løsningen når B går mot K ?

Del a) er grei å løse. Skriver vi ut

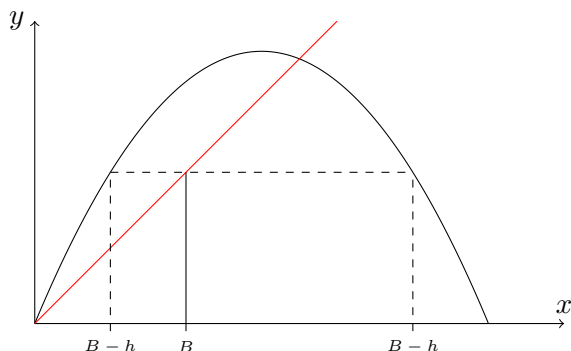
$$g(B) = B + rB \left(1 - \frac{B}{K}\right) = (1+r)B - \frac{r}{K}B^2,$$

ser vi at $g'(B) = (1+r) - 2\frac{r}{K}B$. Vi setter $g'(B) = 0$, og får $B = \frac{K(1+r)}{2r}$. Det er lett å sjekke at dette er et maksimumspunkt, og maksimumsverdien til funksjonen er

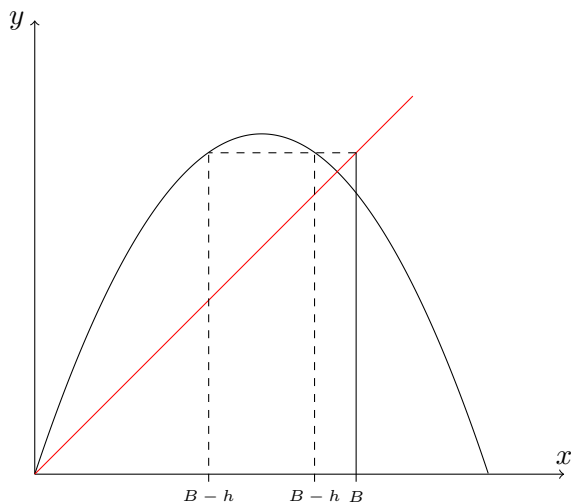
$$\begin{aligned} g_{\max} &= g\left(\frac{K(1+r)}{2r}\right) = (1+r)\frac{K(1+r)}{2r} - \frac{r}{K}\left(\frac{K(1+r)}{2r}\right)^2 \\ &= \frac{K(1+r)^2}{2r} - \frac{K(1+r)^2}{4r} = \frac{K(1+r)^2}{4r}. \end{aligned}$$

Del b) av oppgaven er en god del verre enn jeg opprinnelig tenkte, og det er lett å bli forvirret så lenge man prøver å regne seg frem til svaret. Tåka letter litt når man begynner å tegne.

På figuren nedenfor har jeg tegnet inn linjen $y = x$ og grafen til g . Jeg har også satt inn et punkt B og merket av to løsninger $B - h$ av ligningen $B = g(B - h)$. Det er bare den venstre av disse som teller for oss siden det høyre punktet tilsvarer en negativ h -verdi. Forsøker vi å løse ligningen $g(B - h) = B$ ved regning, må vi forvente å få to løsninger, men det er bare den største (positive) vi kan bruke. Det er greit å sette navn på de to løsningene uansett om de er positive eller ikke, så vi kaller den venstre $\sigma_+(B)$ og den høyre $\sigma_-(B)$.



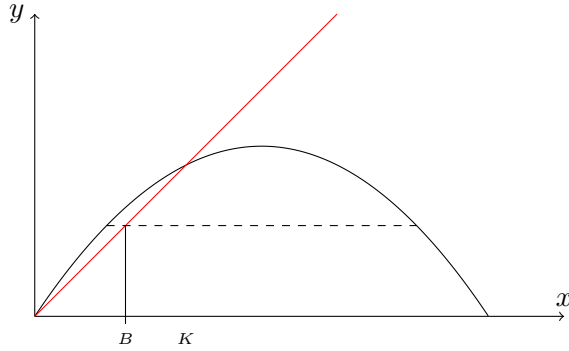
Den neste figuren viser en litt annen situasjon. Her har vi *to* akseptable løsninger av ligningen $g(B-h) = B$. Grunnen er at vi nå har valgt en B som er større en K (husk at K er fikspunktet $g(K) = K$). Legg også merke til at om vi velger B større en maksimalverdien $g_{\max}$ får vi ingen løsninger. Vi har derfor funnet at for $B \in [0, K]$ er det én akseptabel (dvs. positiv) løsning av ligningen $g(B-h) = B$, og at det for $B \in (K, g_{\max})$ er to akseptable løsninger. Som før betegner vi de to løsningene med σ_+ (den venstre) og σ_- (den høyre). Fra figuren ser vi at $\lim_{B \rightarrow K} \sigma_-(B) = 0$, mens $\lim_{B \rightarrow K} \sigma_+(B)$ har en annen grenseverdi (regn den ut om du vill!).



I begge figurene ovenfor ligger fikspunktet K til høyre for toppunktet til parabolen, men som den neste figuren viser, er ikke dette alltid tilfelle. En tilsvarende grafisk analyse som ovenfor viser at for $B < K$ har vi nå en aksepterbar (dvs. positiv) løsning $h = \sigma_+(B)$ og en ikke-akseptabel (negativ) løsning $\sigma_-(B)$. Når $B > K$, er ingen av løsningene akseptable. Legg merke til at i dette tilfellet er $\lim_{B \rightarrow K} \sigma_+(B) = 0$, mens $\lim_{B \rightarrow K} \sigma_-(B)$ har en annen verdi.

For å skille mellom de to tilfellene ovenfor, må vi vite når toppunktet til parabolen ligger til høyre for fikspunktet. Siden toppunktet har x -koordinat

$\frac{K(1+r)}{2r}$, skjer dette når $\frac{K(1+r)}{2r} > K$, dvs. når $r < 1$.



Hvis vi oppsummerer vår geometriske analyse, ser vi at:

- Hvis $r < 1$, så er $\lim_{B \rightarrow K} \sigma_+(B) = 0$.
- Hvis $r > 1$, så er $\lim_{B \rightarrow K} \sigma_-(B) = 0$.

La oss se om vi kan gjenskape den geometriske analysen gjennom regning. Ligningen $B = g(B - h)$ har formen

$$B = (1 + r)(B - h) - \frac{r}{K}(B - h)^2.$$

Vi kan omforme denne ligningen til

$$\frac{r}{K}(h - B)^2 + (1 + r)(h - B) + B = 0,$$

og løser vi denne annengradsligningen for $h - B$, får vi

$$h - B = \frac{-(1 + r) \pm \sqrt{(1 + r)^2 - 4\frac{rB}{K}}}{\frac{2r}{K}},$$

dvs.

$$h = B + \frac{-K(1 + r) \pm K\sqrt{(1 + r)^2 - 4\frac{rB}{K}}}{2r}.$$

I notasjonen ovenfor betyr dette at

$$\sigma_+(B) = B + \frac{-K(1 + r) + K\sqrt{(1 + r)^2 - 4\frac{rB}{K}}}{2r}$$

og

$$\sigma_-(B) = B + \frac{-K(1 + r) - K\sqrt{(1 + r)^2 - 4\frac{rB}{K}}}{2r}.$$

For å kontrollere grenseovergangene ovenfor, antar vi først at $r < 1$. Da er

$$\begin{aligned}
\lim_{B \rightarrow K} \sigma_+(B) &= \lim_{B \rightarrow K} \left(B + \frac{-K(1+r) + K\sqrt{(1+r)^2 - 4\frac{rB}{K}}}{2r} \right) \\
&= K + \frac{-K(1+r) + K\sqrt{(1+r)^2 - 4r}}{2r} \\
&= K + \frac{-K(1+r) + K\sqrt{(1-r)^2}}{2r} \\
&= K + \frac{-K(1+r) + K(1-r)}{2r} = K - K = 0
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\sqrt{(1-r)^2} = 1-r$ siden $r < 1$.

Vi antar så at $r > 1$. Da er

$$\begin{aligned}
\lim_{B \rightarrow K} \sigma_-(B) &= \lim_{B \rightarrow K} \left(B + \frac{-K(1+r) - K\sqrt{(1+r)^2 - 4\frac{rB}{K}}}{2r} \right) \\
&= K + \frac{-K(1+r) - K\sqrt{(1+r)^2 - 4r}}{2r} \\
&= K + \frac{-K(1+r) - K\sqrt{(1-r)^2}}{2r} \\
&= K + \frac{-K(1+r) - K(r-1)}{2r} = K - K = 0
\end{aligned}$$

der vi har brukt at nå er $\sqrt{(1-r)^2} = \sqrt{(r-1)^2} = r-1$ siden $r > 1$.

Uten den geometriske analysen er det vanskelig å forstå distinksjonen mellom $r < 1$ og $r > 1$ i regningene ovenfor.