

Optimal utvinning av ikke-fornybar ressurs

I dette notatet skal vi se på hvordan vi kan finne den optimal utvinningen av en ikke-fornybar ressurs over en lengre periode. Vi antar at vi starter med en mengde $S_0 = S$ av ressursen, og at vi ved tidspunktene $0, 1, 2, \dots, T-1$ utvinner henholdsvis $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{T-1}$. Siden ressursen ikke er fornybar, vil den gjenværende mengden S_t ved tidspunktet t være gitt ved $S_t = S - u_0 - u_1 - \dots - u_{t-1}$. Spesielt er $S_{t+1} = S_t - u_t$. Vi må anta at ved hvert tidspunkt er

$$0 \leq u_t \leq S_t.$$

Nytten av denne utvinningen er

$$N(u_1, u_2, \dots, u_{T-1}) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t u_t^\eta + \rho^T S_T^\eta,$$

der ρ er en positiv diskonteringsfaktor og $0 < \eta < 1$. Utfordringen er å finne sekvensen $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{T-1}$ som maksimerer nytten.

Løsningen er presentert som *Result 5.6* på side 118 i boken til De Lora og Doyen, og hensikten med dette notatet er å vise hvordan man kommer frem til resultatet.

Som i mange oppgaver av denne typen må vi løse nesten det samme optimeringsproblemet mange ganger, og vi starter derfor med en generell beregning som dekker alle tilfellene:

Lemma 1 *Anta at A, B, x er positive tall og la*

$$f(u) = A^{\eta-1} u^\eta + B^{\eta-1} (x-u)^\eta \quad \text{for } 0 \leq u \leq x.$$

Da har f maksimumsverdien

$$f_{\max}(x) = \left(\frac{AB}{A+B} \right)^{\eta-1} x^\eta \tag{1}$$

som oppnås i punktet

$$u^* = \frac{B}{A+B} x. \tag{2}$$

Vi har også

$$x - u^* = \frac{A}{A+B} x. \tag{3}$$

Bevis: Deriverer vi, får vi

$$f'(u) = A^{\eta-1} \eta u^{\eta-1} + B^{\eta-1} \eta (x-u)^{\eta-1} (-1),$$

og setter vi den deriverte lik 0, gir dette ligningen

$$A^{\eta-1}\eta u^{\eta-1} = B^{\eta-1}\eta(x-u)^{\eta-1}.$$

Forkorter vi bort η og opphøyer begge sider i $\frac{1}{\eta-1}$, får vi

$$Au = B(x-u),$$

som leder til $u = \frac{B}{A+B}$. Det er lett å sjekke at dette er et maksimumspunkt, og at $x-u = \frac{A}{A+B}$. Det gjenstår å regne ut maksimumsverdien:

$$\begin{aligned} f_{\max}(x) &= A^{\eta-1}u^\eta + B^{\eta-1}(x-u)^\eta = A^{\eta-1}\left(\frac{B}{A+B}x\right)^\eta + B^{\eta-1}\left(\frac{A}{A+B}x\right)^\eta \\ &= \frac{A^{\eta-1}B^\eta + B^{\eta-1}A^\eta}{(A+B)^\eta}x^\eta = \frac{(AB)^{\eta-1}(B+A)}{(A+B)^\eta}x^\eta = \left(\frac{AB}{A+B}\right)^{\eta-1}x^\eta. \end{aligned}$$

□

Bemerkning: Det kan se litt merkelig ut at vi kaller konstantene $A^{\eta-1}$ og $B^{\eta-1}$ i lemmaet ovenfor. Vi kunne ha brukt bare A og B isteden, men det ville ha ført til mer uoversiktlige formler senere.

For å utnytte lemmaet fullt ut innfører vi en ny hjelpestørrelse

$$a = \rho^{\frac{1}{\eta-1}}.$$

Dette gir $\rho = a^{\eta-1}$ og $\rho^t = (a^t)^{\eta-1}$. Nyttten kan dermed uttrykkes som

$$N(u_1, u_2, \dots, u_{T-1}) = \sum_{t=0}^{T-1} (a^t)^{\eta-1} u_t^\eta + (a^T)^{\eta-1} S_T^\eta \quad (4)$$

Legg merke til at siden ρ typisk er litt mindre enn 1, og η ligger mellom 0 og 1, er a typisk litt større enn 1. Hvis vi for eksempel velger $\rho = 0.95$ og $\eta = \frac{3}{4}$, blir $a \approx 1.228$. Velger vi isteden $\rho = 0.95$ og $\eta = \frac{1}{2}$, får vi $a \approx 1.108$, og velger vi $\rho = 0.97$ og $\eta = \frac{1}{2}$, får vi $a \approx 1.063$. Vi skal komme tilbake til disse verdiene i figuren helt til slutt.

Vi er nå klar til å gå løs på optimeringen. Som vanlig begynner vi bakfra og ser på situasjonen ved tidspunkt $T-1$. Hvis vi på dette tidspunktet har en ressurs x og utvinner u , har vi en samlet nytte fra tidspunktene $T-1$ og T på

$$f(u) = (a^{T-1})^{\eta-1}u^\eta + (a^T)^{\eta-1}(x-u)^\eta.$$

Vi ønsker å finne den optimale u -verdien, og hvis vi legger merke til at dette er problemet fra lemmaet med $A = a^{T-1}$ og $B = a^T$, ser vi at den beste u 'en er

$$u_{T-1}^*(x) = \frac{a^T}{a^{T-1} + a^T}x = \frac{a}{1+a}x.$$

Maksimalverdien er verdifunksjonen ved tiden $T - 1$, og vi ser at

$$V_{T-1}(x) = f_{\max}(x) = \left(\frac{a^{T-1}a^T}{a^{T-1} + a^T} \right)^{\eta-1} x^\eta = \left(\frac{a^T}{1+a} \right)^{\eta-1} x^\eta.$$

Vi flytter oss nå et skritt bakover i tid og ser på situasjonen ved tiden $T - 2$. Hvis vi har en ressurs x , utvinner u ved tiden $T - 2$ og deretter opptrer optimalt, har vi en nytte på

$$f(u) = (a^{T-2})^{\eta-1} u^\eta + V_{T-1}(x - u) = (a^{T-2})^{\eta-1} u^\eta + \left(\frac{a^T}{1+a} \right)^{\eta-1} (x - u)^\eta.$$

Vi ønsker å maksimere f , og bruker vi lemmaet med $A = a^{T-2}$ og $B = \frac{a^T}{1+a}$, får vi at det optimale valget for u er

$$u_{T-2}^*(x) = \frac{\frac{a^T}{1+a}}{a^{T-2} + \frac{a^T}{1+a}} x = \frac{\frac{a^2}{1+a}}{1 + \frac{a^2}{1+a}} x = \frac{a^2}{1+a+a^2} x.$$

Maksimalverdien er

$$\begin{aligned} V_{T-2}(x) &= f_{\max}(x) = \left(\frac{a^{T-2} \frac{a^T}{1+a}}{a^{T-2} + \frac{a^T}{1+a}} \right)^{\eta-1} x^\eta \\ &= \left(\frac{\frac{a^T}{1+a}}{1 + \frac{a^2}{1+a}} \right)^{\eta-1} x^\eta = \left(\frac{a^T}{1+a+a^2} \right)^{\eta-1} x^\eta. \end{aligned}$$

Sammenligner vi disse resultatene med resultatene for $T - 1$, får vi en mistanke om de generelle uttrykkene for $u_{T-k}^*(x)$ og $V_{T-k}(x)$: Kanskje er

$$u_{T-k}^*(x) = \frac{a^k}{1+a+a^2+\dots+a^k} x$$

og

$$V_{T-k}(x) = \left(\frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k} \right)^{\eta-1} x^\eta ?$$

(Hvis du synes det er litt tidlig å formulere en slik hypotese, kan du regne ut $u_{T-3}^*(x)$ og $V_{T-3}(x)$ først.) Vi skal bruke induksjon til å vise at dette er tilfellet.

Setning 2 For alle positive x og alle $k \leq T$ er

$$u_{T-k}^*(x) = \frac{a^k}{1+a+a^2+\dots+a^k} x$$

og

$$V_{T-k}(x) = \left(\frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k} \right)^{\eta-1} x^\eta$$

Bevis: Vi har allerede vist at formlene holder for små verdier av k , og det er derfor nok å vise at hvis de holder for et naturlig tall k , så holder de også for det neste tallet $k+1$. Vi ser på situasjonen ved tiden $T-k-1 = T-(k+1)$. Hvis vi har en ressurs x , utvinner u og deretter opptre optimalt, har vi nytten

$$\begin{aligned} f(u) &= (a^{T-k-1})^{\eta-1} u^\eta + V_{T-k}(x-u) \\ &= (a^{T-k-1})^{\eta-1} u^\eta + \left(\frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k} \right)^{\eta-1} x^\eta, \end{aligned}$$

der vi har brukt induksjonshypotesen i det siste skrittet. Vi ønsker å maksimere dette uttrykket, og bruker vi Lemma 1 med $A = a^{T-k-1}$ og $B = \frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k}$, ser vi at det beste valget av u er

$$\begin{aligned} u_{T-k-1}^*(x) &= \frac{\frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k}}{a^{T-k-1} + \frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k}} x \\ &= \frac{\frac{a^{k+1}}{1+a+a^2+\dots+a^k}}{1 + \frac{a^{k+1}}{1+a+a^2+\dots+a^k}} x = \frac{a^{k+1}}{1+a+a^2+\dots+a^k+a^{k+1}} x, \end{aligned}$$

som er det vi ønsket oss. Fra lemmaet får vi også at maksimalverdien er

$$\begin{aligned} V_{T-k-1}(x) &= \left(\frac{a^{T-k-1} \frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k}}{a^{T-k-1} + \frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k}} \right)^{\eta-1} x^\eta \\ &= \left(\frac{\frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k}}{1 + \frac{a^{k+1}}{1+a+a^2+\dots+a^k}} \right)^{\eta-1} x^\eta = \left(\frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k+a^{k+1}} \right)^{\eta-1} x^\eta, \end{aligned}$$

som er det vi skulle vise. $\square$

Vi kan forenkle uttrykkene i setningen ved å utnytte at $1+a+a^2+\dots+a^k$ er en endelig geometrisk rekke med sum

$$1+a+a^2+\dots+a^k = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}.$$

Vi får

$$u_{T-k}^*(x) = \frac{a^k}{1+a+a^2+\dots+a^k} x = \frac{a^k(a-1)}{a^{k+1}-1} x$$

og

$$V_{T-k}(x) = \left(\frac{a^T}{1+a+a^2+\dots+a^k} \right)^{\eta-1} x^\eta = \left(\frac{a^T(a-1)}{a^{k+1}-1} \right)^{\eta-1} x^\eta.$$

Så langt har vi telt tiden baklengs fra T og nedover, men setter vi $t = T - k$ (og dermed $k = T - t$), får vi

$$u_t^*(x) = \frac{a^{T-t}(a-1)}{a^{T-t+1}-1}x$$

og

$$V_t(x) = \left(\frac{a^T(a-1)}{a^{T-t+1}-1} \right)^{\eta-1} x^\eta.$$

For å få bedre kontroll på hvor fort disse størrelsene avtar, lønner det seg å skrive dem om litt. Vi ser at

$$u_t^*(x) = \frac{a^{T-t}(a-1)}{a^{T-t+1}-1}x = \frac{a-1}{a-a^{t-T}}x = b(t)x,$$

der

$$b(t) = \frac{a-1}{a-a^{t-T}}.$$

Legg merke til at $b(t)$ er en langsomt voksende funksjon med $b(0) = \frac{a-1}{a-\frac{1}{a^T}} > 1 - \frac{1}{a}$ og $b(1) = 1$. Siden $(a^t)^{\eta-1} = \rho^t$, har vi også at

$$\begin{aligned} V_t(x) &= \left(\frac{a^T(a-1)}{a^{T-t+1}-1} \right)^{\eta-1} x^\eta = \left(\frac{a^t a^{T-t}(a-1)}{a^{T-t+1}-1} \right)^{\eta-1} x^\eta \\ &= \left(\frac{a-1}{a-a^{t-T}} \right)^{\eta-1} \rho^t x^\eta = b(t)^{\eta-1} \rho^t x^\eta. \end{aligned}$$

Bortsett fra at notasjonen er litt annerledes, er disse uttrykkene de samme som i *Result 5.6* på side 118 i boken til De Lora og Doyen.

Anta nå at vi starter med en ressurs $S_0 = S$ ved tiden 0, og ønsker å regne ut hvor mye som er igjen ved tidspunktene $1, 2, 3, \dots, T$. Kaller vi disse restverdiene $S_1, S_2, \dots, S_T$, har vi

$$S_{t+1} = S_t - u_t^*(S_t),$$

og bruker vi at $u_t^*(S_t) = b(t)S(t)$, får vi

$$S(t+1) = (1 - b(t)) S(t) = \left(\frac{a - a^{t-T}}{a - a^{t-T}} - \frac{a-1}{a-a^{t-T}} \right) S(t) = \frac{1 - a^{t-T}}{a - a^{t-T}} S(t) = \frac{a^{T-t} - 1}{a^{T-t+1} - 1} S(t).$$

Starter vi forfra, får vi

$$\begin{aligned} S(1) &= \frac{a^T - 1}{a^{T+1} - 1} S \\ S(2) &= \frac{a^{T-1} - 1}{a^T - 1} S(1) = \frac{a^{T-1} - 1}{a^T - 1} \cdot \frac{a^T - 1}{a^{T+1} - 1} S = \frac{a^{T-1} - 1}{a^{T+1} - 1} S \\ S(3) &= \frac{a^{T-2} - 1}{a^{T-1} - 1} S(2) = \frac{a^{T-2} - 1}{a^{T-1} - 1} \cdot \frac{a^{T-1} - 1}{a^{T+1} - 1} S = \frac{a^{T-2} - 1}{a^{T+1} - 1} S \end{aligned}$$

Mønsteret skulle nå være klart:

$$S(t) = \frac{a^{T+1-t} - 1}{a^{T+1} - 1} S$$

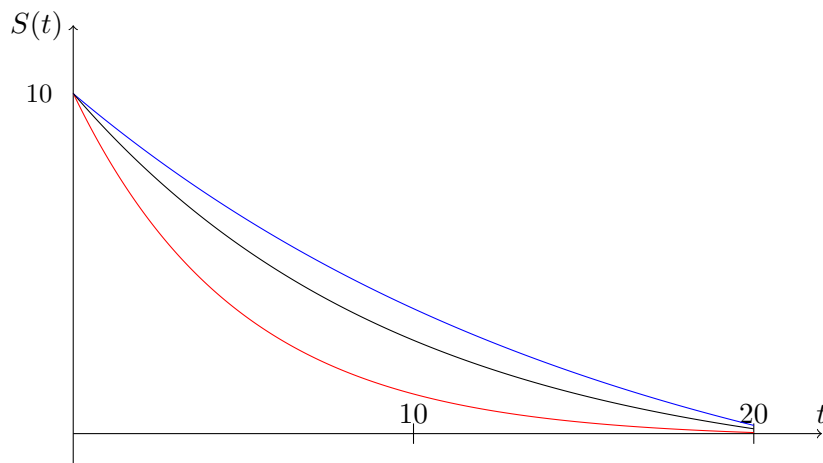
(du kan bevise dette med induksjon hvis du vil). Dette er formelen rett under *Result 5.6* i læreboken. Vi får også at uttaket ved tiden t er

$$\begin{aligned} u_t^*(S_t) &= b(t)S(t) = \frac{a-1}{a-a^{t-T}} \cdot \frac{a^{T+1-t} - 1}{a^{T+1} - 1} S \\ &= \frac{a^{T-t}(a-1)}{(a^{T-t+1} - 1)} \cdot \frac{a^{T+1-t} - 1}{a^{T+1} - 1} S \\ &= \frac{a^{T-t}(a-1)}{a^{T+1} - 1} S = \frac{Sa^T(a-1)}{a^{T+1} - 1} a^{-t}, \end{aligned}$$

som viser at uttaket avtar med en faktor $\frac{1}{a}$ fra ett tidspunkt til det neste, altså

$$u_{t+1}^*(S(t+1)) = \frac{1}{a} u_t^*(S(t)).$$

Det er instruktivt å tegne opp funksjonen $S(t)$ for forskjellige verdier av a (husk at $S(t)$ er hvor mye vi har igjen av ressursen ved tiden t). Hvis vi setter $S = 10$ og $T = 20$, viser grafene nedenfor utviklingen for henholdsvis $a = 1.228$ (tilsvarende $\rho = 0.95$ og $\eta = \frac{3}{4}$), $a = 1.108$ (tilsvarende $\rho = 0.95$ og $\eta = \frac{1}{2}$) og $a = 1.063$ (tilsvarende $\rho = 0.97$ og $\eta = \frac{1}{2}$). Vi ser at den optimale utvinningstakten er ganske forskjellig i de tre tilfellene. Høye verdier for ρ (tett oppunder 1) og lave verdier for η gjør det mer lønnsomt å fordele uttakene over tid.



Figur 1: $S(t)$ for $a = 1.228$ (rød), $a = 1.108$ (svart) og $a = 1.063$ (blå).