

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1020 — Matematikk og bærekraftig forvaltning.

Eksamensdag: Fredag 5. juni 2026.

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (oppgave 1a, 1b osv.) teller i utgangspunktet like mye i sensuren. Hvis det er et problem du ikke kan løse, kan du likevel bruke resultatet derfra i fortsettelsen. Alle svar må begrunnes, men du behøver ikke å forklare i detalj hva du taster inn på kalkulatoren.

Oppgave 1 (20 poeng) Formelen

$$(1 - \alpha)S = 4\epsilon\sigma T^4$$

som vi har utledet for balansen mellom innkommende og utgående stråling, kan brukes på andre planeter enn Jorden, og i denne oppgaven skal vi ta en kikk på Venus. Venus ligger nærmere Sola enn Jorden gjør, og har derfor en høyere energiflukstetthet: $S = 2638 \text{ Wm}^{-2}$. Stefan-Boltzmanns konstant er som alltid $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$.

- Bruk opplysningene ovenfor til å regne ut hva temperaturen på Venus hadde vært om det ikke var for refleksjon (albedo) og drivhuseffekt.
- I virkeligheten har Venus en svært tett atmosfære som leder til både en høy albedo og en usedvanlig sterk drivhuseffekt. Vi setter albedoen til 0.7. Hva er “drivhuskoeffisienten” ϵ når den virkelige temperaturen på Venus er 735 K? Hva betyr dette fysisk?

Oppgave 2 (20 poeng) En fiskebestand modelleres på følgende måte: Dersom det er B_t tonn fisk ett år, vil det året etter være

$$B_{t+1} = \frac{1500B_t}{1000 + B_t}$$

tonn.

- Finn et likevektspunkt $B > 0$ for bestanden.
- Et år da bestanden var på 250 tonn, bestemte man seg for å fiske nok til å holde bestanden på dette nivået. Hvor mye måtte man da fiske?

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 (40 poeng) Vi skal studere et marked med 3 aksjer. Aksje 1 har en forventet avkastning $r_1 = 0.1$ med et standardavvik på $\sigma_1 = 0.2$, aksje 2 har en forventet avkastning $r_2 = 0.3$ med et standardavvik på $\sigma_2 = 0.4$, og aksje 3 har en forventet avkastning $r_3 = 0.2$ med et standardavvik på $\sigma_3 = 0.3$. Korrelasjonene er $\rho_{12} = -0.2$, $\rho_{13} = 0.1$, $\rho_{23} = -0.3$.

- a) Finn kovariansmatrisen C til avkastningene.
 b) Som vanlig setter vi

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man kan regne ut at $C^{-1}\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 27.76 \\ 12.21 \\ 14.14 \end{pmatrix}$ og at $C^{-1}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3.19 \\ 2.91 \\ 3.17 \end{pmatrix}$.

Bruk dette til å regne ut $a = \mathbf{r}^\top C^{-1}\mathbf{1}$, $b = \mathbf{r}^\top C^{-1}\mathbf{r}$ og $c = \mathbf{1}^\top C^{-1}\mathbf{1}$.

- c) Ifølge teorien er den effisiente porteføljefronten del av hyperbelen

$$\sigma^2 = c \frac{\left(r - \frac{a}{c}\right)^2}{bc - a^2} + \frac{1}{c}.$$

Sett inn verdiene fra b) og skisser den effisiente porteføljefronten. Hva er den finansielle betydningen av denne kurven? Tegn også inn posisjonen til aksjene 1, 2 og 3 på figuren.

- d) Anta at en investor ønsker en forventet avkastning på 30 %. Hva er den minste risikoen hun kan ta? En annen investor er villig til å ta en risiko på 20 %. Hva er den største forventede avkastningen han kan oppnå?

Oppgave 4 (40 poeng)

- a) Anta at A , B og x er positive tall. Funksjonen f er definert på intervallet $(0, x)$ ved

$$f(u) = A \ln u + B \ln(x - u).$$

Vis at f har sitt maksimum i punktet $u = \frac{A}{A+B}x$ og at maksimumsverdien er

$$f_{\max} = (A + B) \ln x + C_{A,B}$$

der $C_{A,B} = A \ln \frac{A}{A+B} + B \ln \frac{B}{A+B}$ er en konstant. (Her kan du ha bruk for en av regnereglene for logaritmer: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ for $a, b > 0$.)

Du styrer utviklingen av et oljefelt med en gjenværende mengde utvinnbar olje lik S_0 . Feltet skal lukkes etter tre år. Hvis utvinningen disse tre årene er u_0 , u_1 , og u_2 , settes nytten til

$$N(u_0, u_1, u_2) = \ln(u_0) + \rho \ln(u_1) + \rho^2 \ln(u_2),$$

der $\rho > 0$, og oppgaven er å finne verdiene til u_0 , u_1 og u_2 som maksimerer dette uttrykket.

(Fortsettes på side 3.)

- b) Forklar at for den optimale utvinningen er $u_2 = S - u_0 - u_1$. Bruk dette til å vise at verdifunksjonen er gitt ved

$$V(1, x) = \max_{0 < u < x} \{ \rho \ln(u) + \rho^2 \ln(x - u) \},$$

og bruk resultatet i a) til å finne et eksplisitt uttrykk for $V(1, x)$.

- c) Finn verdifunksjonen $V(0, x)$.
- d) Hva er de optimale uttakene u_0 , u_1 og u_2 ?

SLUTT