

Løsningsforslag til eksamen i MAT1020, 5. juni 2026

Oppgave 1. a) Løser vi ligningen

$$(1 - \alpha)S = 4\epsilon\sigma T^4$$

for T , får vi

$$T = \left(\frac{(1 - \alpha)S}{4\epsilon\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Setter vi inn verdiene $\alpha = 0$ (ingen albedo), $\epsilon = 1$ (ingen drivhuseffekt), $S = 2638 \text{ Wm}^{-2}$ og $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$, gir dette

$$T = \left(\frac{1 \cdot 2638}{4 \cdot 1 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}} \right)^{\frac{1}{4}} \text{ K} \approx 328.4 \text{ K},$$

altså en temperatur på ca. 55° C .

b) Løser vi isteden ligningen $(1 - \alpha)S = 4\epsilon\sigma T^4$ for ϵ , får vi

$$\epsilon = \frac{(1 - \alpha)S}{4\sigma T^4}.$$

Setter vi inn $\alpha = 0.7$ og $T = 735$, ser vi at

$$\epsilon = \frac{(1 - 0.7) \cdot 2638}{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 735^4} \approx 0.012.$$

Dette betyr at 98.8 % av varmestralingen fra Venus absorberes i atmosfæren (forutsatt at vår modell fortsatt gjelder under så ekstreme forhold).

Oppgave 2. a) Likevektstilstanden er løsningen av ligningen

$$B = \frac{1500B}{1000 + B}.$$

Forkorter vi bort B (vi er ikke interessert i den trivielle løsningen $B = 0$) og ganger med $1000 + B$, får vi $1000 + B = 1500$, som har løsningen $B = 500$ tonn.

b) Hvis bestanden er på 250 tonn, og vi fisker h tonn, vil bestanden året etter være $\frac{1500(250-h)}{1000+(250-h)}$. Vi må altså løse ligningen

$$250 = \frac{1500(250 - h)}{1000 + (250 - h)}.$$

Forkorter vi med 250 og ganger nevneren over på den andre siden, får vi $1250 - h = 6(250 - h)$. Dette gir $1250 - h = 1500 - 6h$, som igjen gir $h = 50$. Vi må altså fiske 50 tonn per år for å holde bestanden på samme nivå.

Oppgave 3. a) På diagonalen i kovariansmatrisen har vi variansene

$$C_{11} = \sigma_1^2 = 0.2^2 = 0.04$$

$$C_{22} = \sigma_2^2 = 0.4^2 = 0.16$$

$$C_{33} = \sigma_3^2 = 0.3^2 = 0.09$$

Utenfor diagonalen bruker vi formelen $C_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ som gir

$$C_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = -0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.4 = -0.016$$

$$C_{13} = \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.006$$

$$C_{23} = \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 = -0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.3 = -0.036$$

Siden kovariansmatrisen er symmetrisk, har vi nå

$$C = \begin{pmatrix} 0.04 & -0.016 & 0.006 \\ -0.016 & 0.16 & -0.036 \\ 0.006 & -0.036 & 0.09 \end{pmatrix}$$

b) Vi har

$$a = \mathbf{r}^\top C^{-1} \mathbf{1} = (0.1, 0.3, 0.2) \begin{pmatrix} 27.76 \\ 12.21 \\ 14.14 \end{pmatrix} \approx 9.27,$$

$$b = \mathbf{r}^\top C^{-1} \mathbf{r} = (0.1, 0.3, 0.2) \begin{pmatrix} 3.19 \\ 2.91 \\ 3.17 \end{pmatrix} \approx 1.83,$$

$$c = \mathbf{1}^\top C^{-1} \mathbf{1} = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 27.76 \\ 12.21 \\ 14.14 \end{pmatrix} \approx 54.11.$$

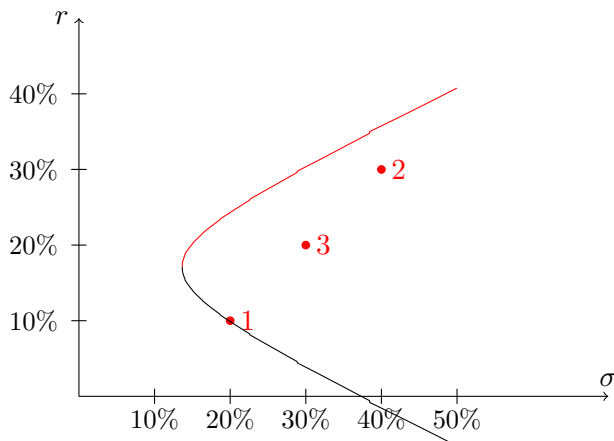
c) Vi regner først ut $bc - a^2 = 1.83 \cdot 54.11 - 9.27^2 \approx 13.09$, $\frac{a}{c} = \frac{9.27}{54.11} \approx 0.171$, og $\frac{1}{c} = \frac{1}{54.11} \approx 0.0185$. Dette gir ligningen

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= c \frac{\left(r - \frac{a}{c}\right)^2}{bc - a^2} + \frac{1}{c} = 54.11 \frac{(r - 0.171)^2}{13.09} + 0.0185 \\ &= 4.13(r - 0.171)^2 + 0.0185. \end{aligned}$$

Løser vi for r , får vi

$$r = 0.171 \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4.13} - \frac{0.0185}{4.13}} = 0.171 \pm \sqrt{0.242\sigma^2 - 0.0045}.$$

Figuren nedenfor viser kurven med enkeltaksjene tegnet inn. Den øvre, røde delen av kurven er den effisiente porteføljefronten. Gitt en risikovilighet σ , angir den størst mulig forventet avkastning, og gitt en ønsket avkastning, angir den minste mulige risiko.



c) Gitt en avkastning $r = 0.3$ setter vi inn i formelen for σ^2 og får

$$\sigma^2 = 4.13(0.3 - 0.171)^2 + 0.0185 \approx 0.0873.$$

Dette gir $\sigma \approx 0.295$, altså en usikkerhet på ca. 29.5 %.

Gitt en risiko på $\sigma = 0.2$ gir formelen for r :

$$r = 0.171 + \sqrt{0.242 \cdot 0.2^2 - 0.0045} \approx 0.243,$$

altså en avkastning på 24.3 %.

Oppgave 4. a) Vi deriverer:

$$f'(u) = A \frac{1}{u} + B \frac{1}{x-u}(-1) = \frac{A}{u} - \frac{B}{x-u}.$$

Setter vi dette uttrykket lik 0, får vi ligningen

$$\frac{A}{u} = \frac{B}{x-u},$$

og ganger vi med $u(x-u)$ på begge sider, gir dette $A(x-u) = Bu$, som har løsningen

$$u = u^*(x) = \frac{A}{A+B} x.$$

Ved å se på fortegnet til den deriverte nær endepunktene 0 og x , er det lett å se at dette er et maksimumspunkt.

For å finne maksimumsverdien observerer vi først at $x-u = \frac{B}{A+B} x$. Maksimumsverdien er dermed

$$f_{\max} = f\left(\frac{A}{A+B}x\right) = A \ln \frac{A}{A+B}x + B \ln \frac{B}{A+B}x$$

$$= A \ln \frac{A}{A+B} + A \ln x + B \ln \frac{B}{A+B} + B \ln x = (A+B) \ln x + C_{A,B},$$

der vi har brukt regneregelen $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ for å komme fra første til andre linje.

b) Siden $\ln$ er en voksende funksjon, vil det alltid lønne seg å tømme reservoaret helt. Hvis vi ved tiden $t = 1$ sitter igjen med en ressurs x og gjør et uttak u , vil den gjenværende nytten derfor være

$$\rho \ln u + \rho^2 \ln(x - u),$$

og vi må altså finne maksimumsverdien til denne funksjonen. Siden dette er problemet fra a) med $A = \rho$ og $B = \rho^2$, ser vi at maksimumspunktet er

$$u_1^*(x) = \frac{A}{A+B}x = \frac{\rho}{\rho + \rho^2}x = \frac{x}{1 + \rho},$$

og at maksimumsverdien er

$$V(1, x) = (A+B) \ln x + C_{A,B} = (\rho + \rho^2) \ln x + C_{\rho, \rho^2} = \rho(1 + \rho) \ln x + C_{\rho, \rho^2}.$$

c) Anta nå at vi er ved tiden $t = 0$ og har en gjenværende ressurs x . Dersom vi gjør et uttak u det første året og deretter handler optimalt, har vi en nytte

$$\ln u + V(1, x - u) = \ln u + \rho(1 + \rho) \ln(x - u) + C_{\rho, \rho^2}.$$

Vi må derfor maksimere funksjonen $f(u) = \ln u + \rho(1 + \rho) \ln(x - u)$. Dette er problemstillingen fra a) med $A = 1$ og $B = \rho(1 + \rho)$, og vi ser at maksimumspunktet er

$$u_0^*(x) = \frac{A}{A+B}x = \frac{1}{1 + \rho(1 + \rho)}x = \frac{x}{1 + \rho + \rho^2}$$

og at maksimumsverdien er

$$f_{\max} = (A+B) \ln x + C_{A,B} = (1 + \rho + \rho^2) \ln x + C_{1, \rho + \rho^2}.$$

Verdifunksjonen er dermed

$$V(0, x) = (1 + \rho + \rho^2) \ln x + C_{1, \rho + \rho^2} + C_{\rho, \rho^2}$$

(vi må huske på å ta med konstantleddet fra forrige regnestykke). Med en startressurs $x = S_0$, har vi altså nytten

$$V(0, S_0) = (1 + \rho + \rho^2) \ln S_0 + C_{1, \rho + \rho^2} + C_{\rho, \rho^2}.$$

d) Ifølge c) skal vi i år 0 gjøre et uttak på

$$u_0^* = u_0^*(S_0) = \frac{S_0}{1 + \rho + \rho^2}.$$

Vi sitter dermed igjen med

$$S_1 = S_0 - u_0^* = \frac{\rho + \rho^2}{1 + \rho + \rho^2} S_0,$$

og i år 1 skal vi dermed gjøre et uttak

$$u_1^* = u_1^*(S_1) = \frac{S_1}{1 + \rho} = S_0 \frac{\rho + \rho^2}{1 + \rho + \rho^2} \cdot \frac{1}{1 + \rho} = \frac{\rho S_0}{1 + \rho + \rho^2}.$$

Det siste uttaket blir

$$u_2^* = S_0 - u_0^* - u_1^* = S_0 - \frac{S_0}{1 + \rho + \rho^2} - \frac{\rho S_0}{1 + \rho + \rho^2} = \frac{\rho^2 S_0}{1 + \rho + \rho^2}.$$