

## MAT1020: Løsningsforslag for Oblig V26

Siden jeg bare hadde en lommeregner tilgjengelig da jeg lagde løsningsforslaget, har jeg foretatt litt grove tilnærminger, og det kan nok være noe avik i desimalene noen steder.

**Oppgave:** a) På diagonalen i kovariansmatrisen har vi variansene

$$C_{11} = \sigma_1^2 = 0.05^2 = (0.5 \cdot 10^{-1})^2 = 0.25 \cdot 10^{-2} = 2.5 \cdot 10^{-3}$$

$$C_{22} = \sigma_2^2 = 0.15^2 = (1.5 \cdot 10^{-1})^2 = 2.25 \cdot 10^{-2} = 22.5 \cdot 10^{-3}$$

$$C_{33} = \sigma_3^2 = 0.1^2 = (1.0 \cdot 10^{-1})^2 = 1.0 \cdot 10^{-2} = 10 \cdot 10^{-3}$$

Utenfor diagonalen bruker vi formelen  $C_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$  som gir

$$C_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0.1 \cdot 0.05 \cdot 0.15 = (1 \cdot 10^{-1})(0.5 \cdot 10^{-1})(1.5 \cdot 10^{-1}) = 0.75 \cdot 10^{-3}$$

$$C_{13} = \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 = -0.2 \cdot 0.05 \cdot 0.10 = (-2 \cdot 10^{-1})(0.5 \cdot 10^{-1})(1.0 \cdot 10^{-1}) = -1 \cdot 10^{-3}$$

$$C_{23} = \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 = -0.1 \cdot 0.15 \cdot 0.10 = (-1 \cdot 10^{-1})(1.5 \cdot 10^{-1})(1.0 \cdot 10^{-1}) = -1.5 \cdot 10^{-3}$$

Siden kovariansmatrisen er symmetrisk, har vi nå

$$C = \frac{1}{1000} \begin{pmatrix} 2.5 & 0.75 & -1 \\ 0.75 & 22.5 & -1.5 \\ -1 & -1.5 & 10 \end{pmatrix}$$

b) Teknologien sier at

$$C^{-1} = 100 \begin{pmatrix} 4.19 & -0.113 & 0.403 \\ -0.113 & 0.452 & 0.056 \\ 0.403 & 0.056 & 1.05 \end{pmatrix}$$

hvor jeg bare har beholdt tre desimaler.

c) For å finne  $a$ ,  $b$  og  $c$  må vi først regne ut  $C^{-1}\mathbf{1}$  og  $C^{-1}\mathbf{r}$ . Vi har

$$\begin{aligned} C^{-1}\mathbf{1} &= 100 \begin{pmatrix} 4.19 & -0.113 & 0.403 \\ -0.113 & 0.452 & 0.056 \\ 0.403 & 0.056 & 1.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 100 \begin{pmatrix} 4.19 - 0.113 + 0.403 \\ -0.113 + 0.452 + 0.056 \\ 0.403 + 0.056 + 1.05 \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 4.480 \\ 0.395 \\ 1.509 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 448.0 \\ 39.5 \\ 150.9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tilsvarende er

$$\begin{aligned} C^{-1}\mathbf{r} &= 100 \begin{pmatrix} 4.19 & -0.113 & 0.403 \\ -0.113 & 0.452 & 0.056 \\ 0.403 & 0.056 & 1.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ &= 100 \begin{pmatrix} 4.19 \cdot 0.1 - 0.113 \cdot 0.2 + 0.403 \cdot 0.2 \\ -0.113 \cdot 0.1 + 0.452 \cdot 0.2 + 0.056 \cdot 0.2 \\ 0.403 \cdot 0.1 + 0.056 \cdot 0.2 + 1.05 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47.70 \\ 9.03 \\ 26.15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har nå

$$a = \mathbf{1}^\top C^{-1} \mathbf{r} = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 47.70 \\ 9.03 \\ 26.15 \end{pmatrix} = 47.70 + 9.03 + 26.15 = 82.9,$$

$$b = \mathbf{r}^\top C^{-1} \mathbf{r} = (0.1, 0.2, 0.2) \begin{pmatrix} 47.70 \\ 9.03 \\ 26.15 \end{pmatrix} = 0.1 \cdot 47.70 + 0.2 \cdot 9.03 + 0.2 \cdot 26.15 = 11.81,$$

$$c = \mathbf{1}^\top C^{-1} \mathbf{1} = (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 448.0 \\ 39.5 \\ 150.9 \end{pmatrix} = 638.4.$$

d) Ifølge formel (19) i Benth's notat er den optimale porteføljen gitt ved

$$\mathbf{w}^* = \frac{cr - a}{bc - a^2} C^{-1} \mathbf{r} + \frac{b - ar}{bc - a^2} C^{-1} \mathbf{1}$$

Vi ser først at  $bc - a^2 = 667$ . Setter vi alle verdiene vi nå har funnet, inn i uttrykket ovenfor, får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^* &= \frac{638.4r - 82.9}{667} \begin{pmatrix} 47.70 \\ 9.03 \\ 26.15 \end{pmatrix} + \frac{11.81 - 82.9r}{667} \begin{pmatrix} 448.0 \\ 39.5 \\ 150.9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.004 \\ -0.423 \\ -0.578 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -10.03 \\ 3.733 \\ 6.274 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

På grunn av alle avrundingene er ikke dette helt nøyaktig; summen av komponentene i den første vektoren burde ha vært 1, mens summen av komponentene i den andre vektoren skulle ha vært 0. Vi får til dette ved å gjøre en ytterligere tilnærming:

$$\mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -0.42 \\ -0.58 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -10.0 \\ 3.73 \\ 6.27 \end{pmatrix}$$

Med denne tilnærmingen får vi at de optimale porteføljene er:

- For  $r = 0.15$ :  $\mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.14 \\ 0.36 \end{pmatrix}$
- For  $r = 0.2$ :  $\mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.33 \\ 0.67 \end{pmatrix}$
- For  $r = 0.25$ :  $\mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.51 \\ 0.99 \end{pmatrix}$

e) Ifølge formel (20) i Benth's notat er den effisiente porteføljefronten gitt ved

$$\sigma^2 = c \frac{\left(r - \frac{a}{c}\right)^2}{bc - a^2} + \frac{1}{c}. \quad (1)$$

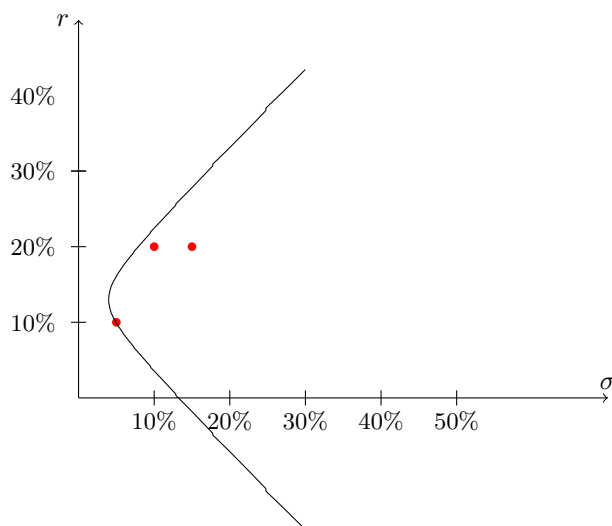
Hvis vi løser for  $r$ , får vi

$$r = \frac{a}{c} \pm \sqrt{\frac{bc - a^2}{c} \sigma^2 - \frac{bc - a^2}{c^2}}.$$

Med våre verdier for  $a$ ,  $b$  og  $c$ , får vi

$$r = 0.13 \pm \sqrt{1.045\sigma^2 - 0.00164}. \quad (2)$$

f) Figuren nedenfor viser den effisiente porteføljefronten med enkeltaksjene inntegnet i rødt.



g) Vi kan gå igjennom den samme prosedyren som ovenfor med det nye markedet, men siden det bare har to aksjer, vet vi at det kun finnes én portefølje for hver  $r$ , og vi begynner med å finne den. Vi må ha

$$\begin{aligned} w_1 r_1 + w_2 r_2 &= r \\ w_1 + w_2 &= 1 \end{aligned}$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi

$$w_1 = \frac{r - r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{og} \quad w_2 = \frac{r_1 - r}{r_1 - r_2}.$$

Setter vi inn  $r_1 = 0.1$  og  $r_2 = 0.2$ , gir dette

$$w_1 = 2 - 10r \quad \text{og} \quad w_2 = 10r - 1.$$

Den optimale (og eneste!) porteføljen i dette tilfellet er dermed

$$\mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Kovariansmatrisen er det øvre venstre hjørnet av den forrige kovariansmatrisen:

$$C = \frac{1}{1000} \begin{pmatrix} 2.5 & 0.75 \\ 0.75 & 22.5 \end{pmatrix}.$$

Ifølge teorien er variansen til porteføljen gitt ved:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbf{w}^\top C \mathbf{w} = C_{11}w_1^2 + 2C_{12}w_1w_2 + C_{22}w_2^2 \\ &= \frac{1}{1000} (2.5(2-10r)^2 + 2 \cdot 0.75(2-10r)(10r-1) + 22.5(10r-1)^2) \\ &= \frac{1}{1000} (10 - 100r + 250r^2 + 30r - 3 - 150r^2 + 15r + 2250r^2 - 450r + 22.5) \\ &= \frac{1}{1000} (2350r^2 - 505r + 29.5) = 2.350r^2 - 0.505r + 0.0295. \end{aligned} \quad (3)$$

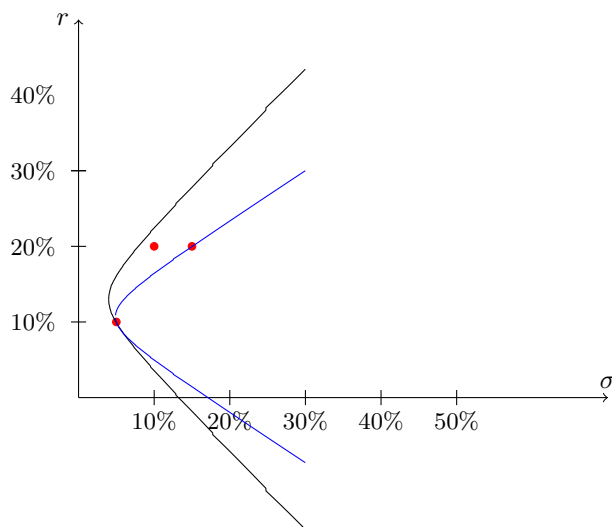
For å finne  $r$  som funksjon av  $\sigma$ , løser vi ligningen

$$2.350r^2 - 0.505r + 0.0295 - \sigma^2 = 0$$

mhp.  $r$  og får:

$$\begin{aligned} r &= \frac{0.505 \pm \sqrt{0.505^2 - 4 \cdot 2.350 \cdot (0.0295 - \sigma^2)}}{2 \cdot 2.350} \\ &= 0.107 \pm \frac{\sqrt{9.4\sigma^2 - 0.0223}}{4.70} \end{aligned} \quad (4)$$

h) I figuren nedenfor er den nye effisiente porteføljefronten (i blått) tegnet inn sammen med den gamle.



i) Vi ser at generelt gir markedet med tre aksjer atskillig bedre muligheter enn markedet med bare to aksjer. Dersom vi ønsker en avkastning på  $r = 0.2$ , gir formel (3) en risiko på  $\sigma = 15\%$  for markedet med bare to aksjer, mens formel (1) bare gir en risiko på  $7.9\%$  for markedet med tre aksjer. Aksepterer vi en risiko på  $15\%$ , har vi ifølge formel (2) en forventet avkastning på  $27.8\%$  i det store markedet, mens formel (4) bare gir en avkastning på  $20\%$  i det lille markedet.