

Prøveeksamen i MAT1020, V26

Prøveeksamenen er litt lengre enn et normalt eksamenssett, men jeg hadde lyst til å få med flest mulig av de aktuelle problemstillingene.

Oppgave 1. (10 poeng) Formelen

$$(1 - \alpha)S = 4\epsilon\sigma T^4$$

som vi har utledet for balansen mellom innkommende og utgående stråling, kan brukes på andre planeter enn Jorden, og i denne oppgaven skal vi ta en kikk på Mars. For Mars kan vi regne med en albedo på 0.2, og siden planeten har en svært tynn atmosfære, ser vi bort fra drivhuseffekten og setter $\epsilon = 1$. Mars ligger lenger fra Sola enn Jorden gjør, og har derfor en lavere energiflukstetthet på overflaten: $S = 592.0 \text{ Wm}^{-2}$. Stefan-Boltzmanns konstant er som alltid $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$. Bruk disse opplysningene til å estimere overflatetemperaturen på Mars.

Oppgave 2. (30 poeng) En fiskebestand utvikler seg etter følgende modell. Dersom det er B tonn fisk ett år, der $0 < B < 100$, vil bestanden året etter være

$$g(B) = \frac{5}{3}B \left(1 - \frac{B}{100}\right)$$

tonn.

- Tegn grafen til g og bestem likevektstilstanden B^* slik at $g(B^*) = B^*$.
- Anta at bestanden i år $n = 0$ er $B_0 = 70$ tonn. Regn ut størrelsen til bestanden de tre neste årene. Lag en hypotese om hvordan størrelsen til bestanden vil utvikle seg med tiden.
- Et år da bestanden er 15 tonn, beslutter man seg for å begynne fangst av fisken. Målet er å holde bestanden konstant på 15 tonn. Hvor mye må man fiske hvert år?

Oppgave 3. (20 poeng) Anta at vi ønsker å bygge vindkraftverk på tre steder, 1, 2 og 3. Kapasitetsfaktorene for de tre stedene er $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.4$ og $r_3 = 0.5$ med standardavvik $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.25$ og $\sigma_3 = 0.3$. Korrelasjonen mellom produksjonene er $\rho_{12} = 0.4$, $\rho_{1,3} = -0.1$, $\rho_{2,3} = -0.2$. Vi antar at for alle i er $\text{cov}(R_i, E) = 0$, der E er etterspørselen.

- Finn kovariansmatrisen C .

- Ifølge teorien er den optimale innstalleringen av kapasitet $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ gitt ved

$$\mathbf{w} = \mu_E(C + \mathbf{r}\mathbf{r}^\top)^{-1}\mathbf{r}$$

der μ_E er gjennomsnittsetterspørselen (dette forutsetter at w_1, w_2, w_3 er positive). Anta at $\mu_E = 1000$ MWh og finn optimal $\mathbf{w}$. Du kan bruke at

$$(C + \mathbf{r}\mathbf{r}^\top)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 22.82 & -13.94 & -5.43 \\ -13.94 & 16.73 & -1.15 \\ -5.43 & -1.15 & 6.67 \end{pmatrix}.$$

Hva er den gjennomsnittlige produksjonen fra disse kraftverkene?

Oppgave 4. (30 poeng) I denne oppgaven skal vi studere et finansielt marked med tre aksjer med forventet avkastning henholdsvis $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.3$ og $r_3 = 0.1$. Vi har

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 10 \\ 20 & 500 & -40 \\ 10 & -40 & 200 \end{pmatrix}$$

der C er kovariansmatrisen til avkastningene.

a) Som vanlig setter vi

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Regn ut $a = \mathbf{r}^\top C^{-1} \mathbf{1}$, $b = \mathbf{r}^\top C^{-1} \mathbf{r}$ og $c = \mathbf{1}^\top C^{-1} \mathbf{1}$.

b) Ifølge teorien er den effisiente porteføljefronten del av hyperbelen

$$\sigma^2 = c \frac{\left(r - \frac{a}{c}\right)^2}{bc - a^2} + \frac{1}{c}. \quad (1)$$

Sett inn verdiene fra a) og skisser den effisiente porteføljefronten. Hva er den finansielle betydningen av denne kurven?

c) Anta at en investor ønsker en forventet avkastning på 30 %. Hva er den minste risikoen hun kan ta? En annen investor er villig til å ta en risiko på 20 %. Hva er den største forventede avkastningen han kan oppnå?

Oppgave 5. (40 poeng)

a) Anta at A, B, x er positive tall og at $0 < r < 1$. La f være funksjonen definert ved

$$f(u) = A^{r-1}u^r + B^{r-1}(x-u)^r \quad \text{for } 0 \leq u \leq x.$$

Vis at maksimumspunktet til f er $u = \frac{B}{A+B}x$ og at maksimumsverdien er $\left(\frac{AB}{A+B}\right)^{r-1}x^r$.

Du bestyrer avviklingen av en gruve. Avviklingen skal foregå over to år. Anta at når du starter (år 0) er det S_0 tonn malm igjen i gruva. Dersom du dette året utvinner u_0 tonn og året etter u_1 tonn, så er nytten

$$N(u_1, u_2) = u_0^r + \rho u_1^r + \rho^2 S_2^r$$

der ρ er en diskonteringsfaktor, $0 < \rho < 1$, og $S_2 = S_0 - u_0 - u_1 \geq 0$.

- b) Finn verdifunksjonen $V(1, x)$ (det kan være lurt å innføre en hjelpestørrelse $\alpha = \rho^{\frac{1}{r-1}}$).
- c) Finn verdifunksjonen $V(0, x)$.
- d) Finn de optimale utvinningene u_0 og u_1 .

SLUTT