

Løsningsforslag til prøveeksamen i MAT1020, V26

Oppgave 1. Løser vi ligningen

$$(1 - \alpha)S = 4\epsilon\sigma T^4$$

for T , får vi

$$T = \left(\frac{(1 - \alpha)S}{4\epsilon\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

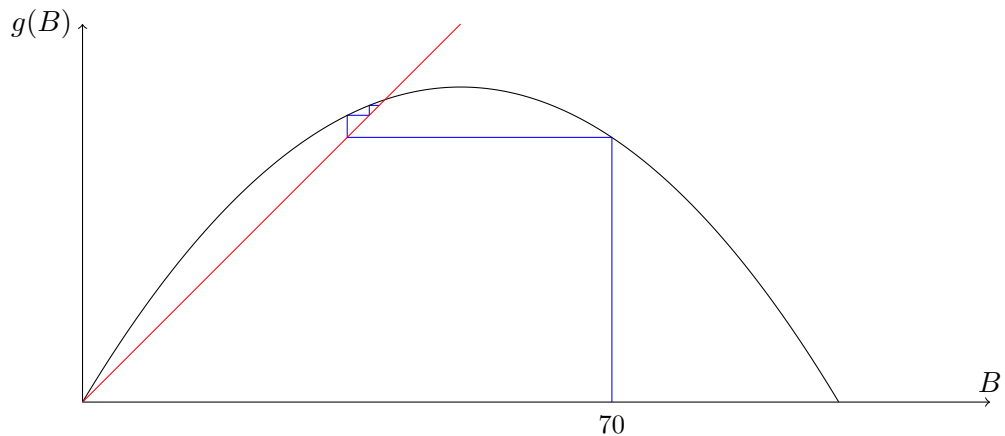
Setter vi inn verdiene $\alpha = 0.2$, $\epsilon = 1$, $S = 592.0 \text{ Wm}^{-2}$ og $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$, gir dette

$$T = \left(\frac{(1 - 0.2) \cdot 592.0}{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}} \right)^{\frac{1}{4}} \text{ K} \approx 213.8 \text{ K}.$$

(Den faktiske gjennomsnittstemperaturen på Mars er 210 K.)

Oppgave 2. a) Likevektstilstanden er løsningen av ligningen $B = g(B)$, dvs. $B = \frac{5}{3}B \left(1 - \frac{B}{100}\right)$. Forkorter vi bort B og ganger med 3, sitter vi igjen med $3 = 5 - \frac{B}{20}$, som har løsningen $B = 40$. Likevektspunktet er derfor $B^* = 40$ (det er også et trivielt likevektspunkt $B = 0$).

Grafen til g er en parabel med nullpunkter i 0 og 100. Jeg har tegnet den nedenfor og lagt inn grafen til $y = x$ (i rødt) for sammenligning.



b) Vi har $B_1 = g(B_0) = g(70) = \frac{5}{3} \cdot 70 \left(1 - \frac{70}{100}\right) = 35$, $B_2 = g(B_1) = g(35) = \frac{5}{3} \cdot 35 \left(1 - \frac{35}{100}\right) \approx 37.92$, $B_3 = g(B_2) = g(37.92) = \frac{5}{3} \cdot 37.92 \left(1 - \frac{37.92}{100}\right) \approx 39.23$. De blå strekene på grafen ovenfor viser utviklingen. Hypotesen er at bestanden nærmer seg likevektstilstanden $B^* = 40$ (og det stemmer).

c) Hvis bestanden er på 15 tonn, og vi fisker h tonn, vil bestanden året etter være $g(15 - h) = \frac{5}{3}(15 - h) \left(1 - \frac{15-h}{100}\right)$. Vi må altså løse ligningen

$$15 = \frac{5}{3}(15 - h) \left(1 - \frac{15 - h}{100}\right).$$

Deler vi på $\frac{5}{3}$ og ganger ut parentesene, får vi

$$9 = (15 - h) - \frac{(15 - h)^2}{100}.$$

Vi kan omorganisere dette til en annengradsligning i $h - 15$:

$$(h - 15)^2 + 100(h - 15) + 900 = 0.$$

Løsningsformelen for annengradsligninger gir

$$h - 15 = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 1 \cdot 900}}{2} = \frac{-100 \pm 80}{2} = \begin{cases} -10 \\ -90 \end{cases}.$$

Siden h må være positiv, kan vi bare bruke den øverste løsningen, og følgelig er $h = 5$. Det er lett å sjekke ved innsetting at dette stemmer.

Oppgave 3. a) På diagonalen i kovariansmatrisen har vi variansene

$$C_{11} = \sigma_1^2 = 0.2^2 = 0.04$$

$$C_{22} = \sigma_2^2 = 0.25^2 = 0.0625$$

$$C_{33} = \sigma_3^2 = 0.3^2 = 0.09$$

Utenfor diagonalen bruker vi formelen $C_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ som gir

$$C_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.25 = 0.02$$

$$C_{13} = \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 = -0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = -0.006$$

$$C_{23} = \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 = -0.2 \cdot 0.25 \cdot 0.3 = -0.015$$

Siden kovariansmatrisen er symmetrisk, har vi nå

$$C = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.02 & -0.006 \\ 0.02 & 0.0625 & -0.015 \\ -0.006 & -0.015 & 0.09 \end{pmatrix}$$

b) Bruker vi formelen $\mathbf{w} = \mu_E(C + \mathbf{r}\mathbf{r}^\top)^{-1}\mathbf{r}$ med de oppgitte verdiene, får vi

$$\mathbf{w} = 1\,000(C + \mathbf{r}\mathbf{r}^\top)^{-1} \approx 1000 \begin{pmatrix} 22.82 & -13.94 & -5.43 \\ -13.94 & 16.73 & -1.15 \\ -5.43 & -1.15 & 6.67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 837 \\ 541 \\ 703 \end{pmatrix}.$$

Bygger vi ut med en maksimal kapasitet på $w_1 = 837$ MWh i lokasjon 1, $w_2 = 541$ MWh i lokasjon 2 og $w_3 = 703$ MWh i lokasjon 3, får vi den beste utnyttelsen (i form av minimal varians på avviket mellom etterspørsel og produksjon). Gjennomsnittlig produksjon er

$$837 \cdot 0.4 + 541 \cdot 0.4 + 703 \cdot 0.5 = 902.7, \text{ MWh},$$

altså noe mindre enn gjennomsnittlig etterspørsel.

Oppgave 4. a) Vi regner først ut

$$C^{-1}\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 10 \\ 20 & 500 & -40 \\ 10 & -40 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 480 \\ 170 \end{pmatrix}$$

og

$$C^{-1}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 10 \\ 20 & 500 & -40 \\ 10 & -40 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 150 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Dermed blir

$$a = \mathbf{r}^\top C^{-1}\mathbf{1} = (0.2, 0.3, 0.1) \begin{pmatrix} 430 \\ 480 \\ 170 \end{pmatrix} = 247,$$

$$b = \mathbf{r}^\top C^{-1}\mathbf{r} = (0.2, 0.3, 0.1) \begin{pmatrix} 87 \\ 150 \\ 10 \end{pmatrix} = 63.4,$$

$$c = \mathbf{1}^\top C^{-1}\mathbf{1} = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 430 \\ 480 \\ 170 \end{pmatrix} = 1080.$$

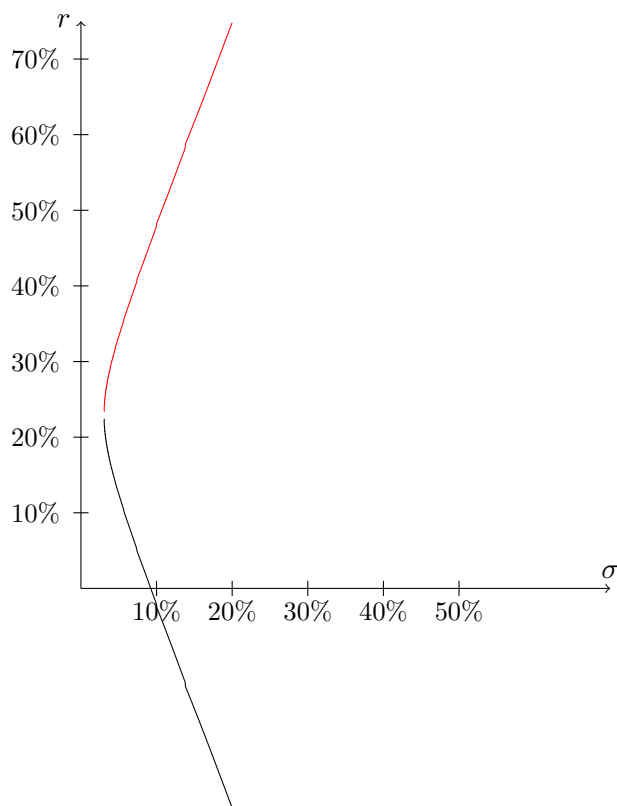
b) Siden $bc - a^2 = 7463$, $\frac{a}{c} = 0.229$ og $\frac{1}{c} = 0.000926$, blir ligningen

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= c \frac{\left(r - \frac{a}{c}\right)^2}{bc - a^2} + \frac{1}{c} = 1080 \frac{(r - 0.229)^2}{7463} + 0.000926 \\ &= 0.145(r - 0.229)^2 + 0.000926. \end{aligned}$$

Løser vi for r , får vi

$$r = 0.229 \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{0.145} - \frac{0.000926}{0.145}} = 0.229 \pm \sqrt{6.90\sigma^2 - 0.00639}.$$

Figuren nedenfor viser kurven. Den øvre, røde delen er den effisiente porteføljefronten. Gitt en risikovillighet σ , angir den størst mulig forventet avkastning, og gitt en ønsket avkastning, angir den minst mulige risiko.



c) Gitt en avkastning $r = 0.3$ setter vi inn i formelen for σ^2 og får

$$\sigma^2 = 0.145(0.3 - 0.229)^2 + 0.000926 = 0.001657.$$

Dette gir $\sigma \approx 0.0407$, altså en usikkerhet på ca. 4.1 %.

Gitt en risiko på $\sigma = 0.2$ gir formelen for r :

$$r = 0.229 + \sqrt{6.90 \cdot 0.2^2 - 0.00639} = 0.748,$$

altså en avkastning på nesten 75 %. Det er tydeligvis gode tider i dette markedet!

Oppgave 5. (40 poeng) a) Vi derivere

$$f'(u) = A^{r-1}ru^{r-1} + B^{r-1}r(x-u)^{r-1}(-1) = r(A^{r-1}u^{r-1} - B^{r-1}(x-u)^{r-1}).$$

Setter vi dette uttrykket lik 0, får vi ligningen

$$A^{r-1}u^{r-1} = B^{r-1}(x-u)^{r-1},$$

og opphøyer vi begge sider i $\frac{1}{r-1}$, gir dette $Au = B(x-u)$, som har løsningen

$$u = u^*(x) = \frac{B}{A+B}x.$$

Ved å se på fortegnet til den deriverte nær endepunktene 0 og x , er det lett å se at dette er et maksimumspunkt.

For å finne maksimumsverdien observerer vi først at $x - u = \frac{A}{A+B} x$. Maksimumsverdien er dermed

$$\begin{aligned} f_{\max} &= f\left(\frac{B}{A+B}x\right) = A^{r-1}\left(\frac{B}{A+B}x\right)^r + B^{r-1}\left(\frac{A}{A+B}x\right)^r \\ &= \frac{A^{r-1}B^{r-1}}{(A+B)^r}(B+A)x^r = \left(\frac{AB}{A+B}\right)^{r-1}x^r. \end{aligned}$$

b) Anta vi ved tiden $n = 1$ har en gjenværende ressurs x . Utvinner vi en mengde u i år 1, har vi en nytte fra de to siste årene på

$$f(u) = \rho u^r + \rho^2(x-u)^r.$$

Vi må finne maksimumsverdien til denne funksjonen, og følger vi hintet med å sette $\alpha = \rho^{\frac{1}{r-1}}$, får vi at $\rho = \alpha^{r-1}$. Uttrykket ovenfor kan dermed skrives

$$f(u) = \alpha^{r-1}u^r + (\alpha^2)^{r-1}(x-u)^r.$$

Bruker vi a) med $A = \alpha$ og $B = \alpha^2$, ser vi at denne funksjonen har maksimum i punktet

$$u_1^*(x) = \frac{\alpha^2}{\alpha + \alpha^2}x = \frac{\alpha}{1 + \alpha}x$$

med maksimumsverdi

$$V(1, x) = \left(\frac{\alpha \cdot \alpha^2}{\alpha + \alpha^2}\right)^{r-1} x^r = \left(\frac{\alpha^2}{1 + \alpha}\right)^{r-1} x^r.$$

Hvis man absolutt vil uttrykke dette med ρ istedenfor α , får man

$$V(1, x) = \left(\frac{\rho^{\frac{2}{r-1}}}{1 + \rho^{\frac{1}{r-1}}}\right)^{r-1} x^r = \frac{\rho^2}{\left(1 + \rho^{\frac{1}{r-1}}\right)^{r-1}} x^r.$$

c) Vi antar nå at vi er i år $n = 0$ med ressurs x . Hvis vi utvinner u tonn dette året og deretter opptrer optimalt, vil vi ha en total nytte på

$$g(u) = u^r + V(1, x-u) = u^r + \left(\frac{\alpha^2}{1 + \alpha}\right)^{r-1} (x-u)^r.$$

Bruker vi a) med $A = 1$ og $B = \frac{\alpha^2}{1+\alpha}$, ser vi at denne funksjonen har maksimum i punktet

$$u_0^*(x) = \frac{\frac{\alpha^2}{1+\alpha}}{1 + \frac{\alpha^2}{1+\alpha}}x = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha + \alpha^2}x,$$

og at maksimalverdien er

$$V(0, x) = \left(\frac{1 \cdot \frac{\alpha^2}{1+\alpha}}{1 + \frac{\alpha^2}{1+\alpha}} \right)^{r-1} x^r = \left(\frac{\alpha^2}{1 + \alpha + \alpha^2} \right)^{r-1} x^r.$$

Erstatter vi α med ρ , får vi

$$V(0, x) = \left(\frac{\rho^{\frac{2}{r-1}}}{1 + \rho^{\frac{1}{r-1}} + \rho^{\frac{2}{r-1}}} \right)^{r-1} x^r = \frac{\rho^2}{\left(1 + \rho^{\frac{1}{r-1}} + \rho^{\frac{2}{r-1}}\right)^{r-1}} x^r.$$

d) Den første uttaket i den optimale utvinning er

$$u_0^*(S_0) = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha + \alpha^2} S_0$$

ifølge regningene i forrige punkt. Dette betyr at vi år $n = 1$ sitter igjen med

$$S_1 = S_0 - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha + \alpha^2} S_0 = \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha + \alpha^2} S_0.$$

Det optimale uttaket i år $n = 1$ er dermed

$$u_1^*(S_1) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} S_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha + \alpha^2} S_0 = \frac{\alpha}{1 + \alpha + \alpha^2} S_0.$$

Bytter vi tilbake til ρ , blir dette

$$u_0^*(S_0) = \frac{\rho^{\frac{2}{r-1}}}{1 + \rho^{\frac{1}{r-1}} + \rho^{\frac{2}{r-1}}} S_0$$

og

$$u_1^*(S_1) = \frac{\rho^{\frac{1}{r-1}}}{1 + \rho^{\frac{1}{r-1}} + \rho^{\frac{2}{r-1}}} S_0.$$