

OPPGAVER MAT1020, VÅREN 2025

3. APRIL

Oppgave 1. Anta at du kan fiske torsk og din nyttefunksjon er $L(h) = \sqrt{h}$. Du har rettigheter til å høste fra torskebestanden i år og de neste 2 år. Bestanden består nå av B torsk. Din diskonteringsrate er $\rho < 1$, mens torsken formerer seg med en faktor $R > 1$ (her kan $\rho \neq \frac{1}{R}$). Du skal fiske torsk som optimerer

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{0 \leq h(0) \leq B \\ 0 \leq h(1) \leq B(1) \\ 0 \leq h(2) \leq B(2)}} \sum_{s=0}^2 \rho^s \sqrt{h(s)} + \rho^3 \sqrt{B(3)} \end{aligned}$$

Dynamikken til torskebestanden blir $B(0) = B, B(1) = R(B - h(0)), B(2) = R(B(1) - h(1))$ og $B(3) = R(B(2) - h(2))$.

a) Definer verdifunksjonen

$$V(t, B) = \max_{\substack{0 \leq h(t) \leq B \\ 0 \leq h(t+1) \leq B(t+1) \\ 0 \leq h(2) \leq B(2)}} \sum_{s=t}^2 \rho^s \sqrt{h(s)} + \rho^3 \sqrt{B(3)}$$

for $t = 0, 1, 2, 3$. Hva blir $V(3, B)$?

- Bruk dynamisk programmeringsprinsipp til å finne den optimale $h^*(2)$ og verdifunksjonen $V(2, B)$.
- Bruk dynamisk programmeringsprinsipp til å finne den optimale $h^*(1)$ og verdifunksjonen $V(1, B)$.
- Bruk dynamisk programmeringsprinsipp til å finne den optimale $h^*(0)$ og verdifunksjonen $V(0, B)$.
- Hvor mye fisk spares til fremtiden, dvs., hva er $B(3)$?

Oppgave 2. Gjør oppgave 1 der du antar at du har initielt $B(0) = B = 100$ torsk (dette kan tolkes som 100 tonn), torsken formerer seg med $R = 1,1$ (10% vekstrate) mens din diskontering $\rho = 1/(1 + 0,05) = 1/1,05$ (5% diskonteringsrate). Hva blir $h^*(t)$ for $t = 0, 1, 2$, og hvor mye sparer du til slutt (hva er $B(3)$)?

Oppgave 3. Gjør oppgave 1, men nå med en nyttefunksjon $L(h) = h^{1/4}$. Anta deretter at $B = 100, R = 1,1$ og $\rho = 1/1,05$, og finn $h^*(t)$ for $t = 0, 1, 2$, og hvor mye sparer du til slutt (hva er $B(3)$)? Sammenlign med det du fant i oppgave 2. Har nyttefunksjonen noe å si på optimalt fiske og hvor mye som spares til neste generasjon?

Oppgave 4. Anta at du har en nyttefunksjon $L(h) = h^\gamma$ der $0 < \gamma < 1$. Du skal pumpe olje opp fra et reservoar, som maksimerer

$$\max_{\substack{0 \leq h(0) \leq S \\ 0 \leq h(1) \leq S(1)}} \sum_{s=0}^1 \rho^s h(s)^\gamma + \rho^2 S(2)^\gamma$$

Her er $0 < \rho < 1$ diskonteringsfaktoren, mens reservoaret har dynamikken $S(0) = S$, $S(1) = S(0) - h(0)$ og $S(2) = S(1) - h(1)$. Løs optimeringsproblemet ved hjelp av det dynamiske programmeringsprinsippet. Hva blir $S(2)$? Hva skjer om du ikke diskonterer, det vil si, hvis du setter $\rho = 1$? Sparer du mer eller mindre olje? I siste delen av denne oppgaven kan du sette $\gamma = 1/2$.

Oppgave 5. Anta at du opererer et oljefelt, og du er interessert i å finne hvor mye du skal pumpe opp av olje for å maksimere nytten din. Du har et reservoar av olje som inneholder $S(0) = 100$ (100 er bare en normalisert størrelse i denne sammenhengen, slik at du kan tenke deg at dine valg for å pumpe olje blir i målt prosent av denne totalen på 100). Feltet har igjen en levetid på $T = 2$ år, og du kan pumpe $h(0)$ olje i år, tid $t = 0$, og $h(1)$ til neste år, $t = 1$. Dynamikken til reservoarets mengde olje blir

$$S(0) = 100, S(1) = S(0) - h(0), S(2) = S(1) - h(1)$$

med kravene at $S(t) \geq 0$ for $t = 0, 1, 2$ og $0 \leq h(t) \leq S(t)$ for $t = 0, 1$. Du har en nyttefunksjon gitt ved $L(h) = \sqrt{h}$ og en diskonteringsfaktor $0 < \rho < 1$. Optimeringsproblemet ditt er

$$\max_{h(0), h(1)} \sqrt{h(0)} + \rho \sqrt{h(1)}$$

- Vis at det er optimalt å tømme reservoaret, det vil si at $S(2) = 0$.
- Sett $x = h(0)$. Vis at $h(1) = 100 - x$.
- Løs optimeringsproblemet

$$\max_{0 \leq x \leq 100} \sqrt{x} + \rho \sqrt{100 - x}$$

Hva blir den beste pumpestrategien for å tømme oljefeltet?

- Hva blir din optimale nytte fra å følge denne strategien, det vil si regn ut $V_0 = \sqrt{x} + \rho \sqrt{100 - x}$ der du setter inn x som du fant i c)?
- Fra b) vet du at pumper du $h(0) = x$, vil du måtte pumpe $h(1) = 100 - x$. Hvis du er på tid $t = 1$, og skal maksimere nytten din, har du derfor bare ett valg, nemlig $h(1) = 100 - x$. Dette gir deg på tid $t = 1$ en nytte $\sqrt{100 - x}$. Du ser at den optimale nytten på tid 1, gitt at du pumper x på tid $t = 0$, er $V_1(x) = \sqrt{100 - x}$! Løs optimeringsproblemet

$$\max_{0 \leq x \leq 100} \sqrt{x} + \rho V_1(x)$$

Oppgave 6. Den generelle biomassedynamikken er gitt som $B(t+1) = g(B(t))$ i likning (2.7) i læreboken. I denne oppgaven skal du finne $B(1)$, $B(2)$ og $B(3)$ (gjør gjerne for flere tidspunkter...) når g er modellert med uttrykkene i (2.8) til (2.13). Bruk parameterverdier som du finner i Figur 2.2, og velg $B(0)$ til å være et par forskjellige verdier (sjekk Figur 2.2 igjen for mulige valg av $B(0)$).

For den lineære modellen for g i (2.8), finn $B(t)$ uttrykt ved $B(0)$ og R (evt. r). Implementer de andre modellene numerisk, og plott $B(t)$ som funksjon av t .