

LØSNINGSFORSLAG TIL PRØVEEKSAMEN

1 MAT1020, VÅREN 2024

①

a) $\underbrace{\text{kapasitetsfaktor}}_{= 0,4} = \frac{\text{produksjon} = 2}{\underbrace{\text{installert kapasitet}}_{= x}}$

$$\Rightarrow 0,4 = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{0,4} = \frac{2}{\frac{4}{10}} = \frac{20}{4} = \underline{\underline{5}}$$

Det er installert 5 MW i kapasitet

b) "Peak hour" er den beste timen med solinnstråling, fra klokken 12 til klokken 13 (som regel)

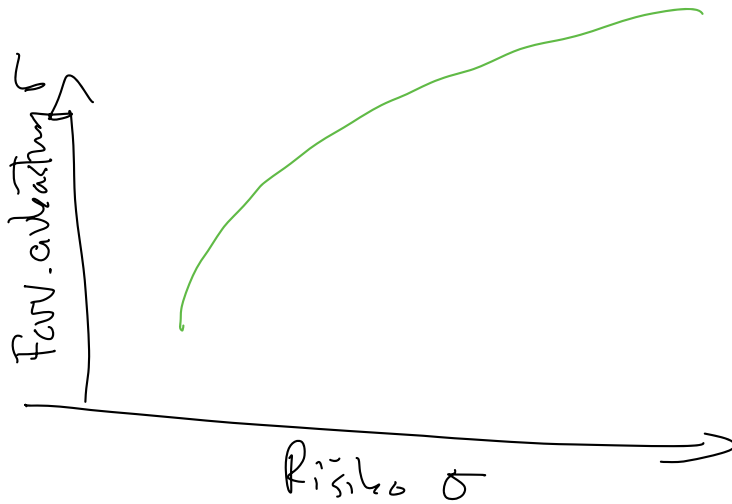
Det er ingen produksjon på natten, mens det neppe er like bra solinnstråling over alle de "lyse" timene som "peak hour". En mulighet er å tenke seg at kapasitetsfaktoren i gjennomsnitt er halvparten av av "peak hour", i de timene det er sol.

Vi finner dermed at produksjonen over et døgn vil bli (hvis vi antar 12 timer med sol)

$$12h \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0,2) \cdot 1MW = 12 \cdot 0,1 \text{ MWh} = \underline{\underline{1,2 \text{ MWh}}}$$

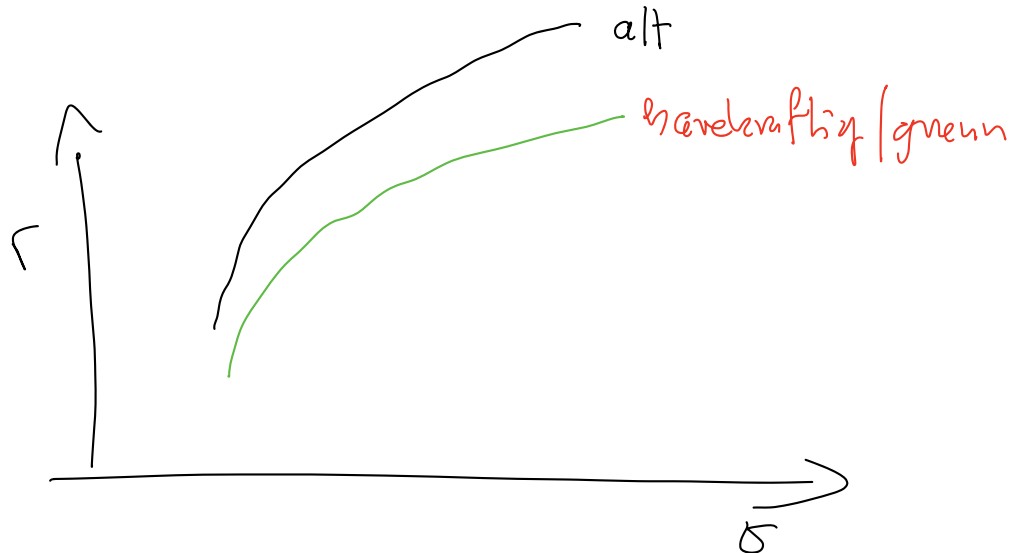
↑ kap. faktor ↑
12 timer med sol installert lemp.

② a)



Den effisiente porteføljepunkten beskriver hvordan den best kan investere dine midler i markedet for å oppnå en gitt forventet avkastning til lavest mulig risiko, eller en høyest mulig avkastning til en gitt risiko. Altså til en gitt avkastning finnes det en portefølje som gir lavest risiko. Alle andre investeringer i markedet med samme forventede avkastning vil ha høyere risiko.

b)



Hvis du begrenser mulige investeringer, skal du i følge Markowitz' teori oppnå lavere forventet avkastning til samme risiko enn om du investerer bredt i hele markedet. Eventuelt, du vil akseptere en høyere risiko i den grønne porteføljen hvis den skal ha samme avkastning i forventning som en portefølje investert i hele markedet.

Påstanden er derfor rett, i følge Markowitz' teori.

3

a) I likevekt vil $B(t) = B(t+1)$ for alle t .

$$\Rightarrow \underline{B(t) = B(t+1)} = \underline{R(B(t) - h(t))}. \text{ Finn } \hat{h(t)} \text{ for denne likningen.}$$

$$\Rightarrow B(t) = R(B(t) - h(t)) \Rightarrow (1 - R)B(t) = -R h(t)$$

$$\Rightarrow \underline{h(t) = \frac{R-1}{R} B(t)}$$

Vi ser at siden $R > 1$, vil $R-1 > 0$ og samtidig $R-1 < R$. Dette betyr at $\frac{R-1}{R} \in (0, 1)$, og $0 < \frac{R-1}{R} B(t) < B(t)$, vi har derfor en lovlig

strategi:
$$\underline{\underline{h_1(t) = \frac{R-1}{R} B(t)}}$$

Du kan derfor heste en andel $\underline{\underline{\frac{R-1}{R}}}$ av ressursen for å holde den i likvekt.

b) Fra definisjonen til verdifunksjoner, vil

$$\underline{\underline{V(2, B) = g^2 \sqrt{B}}}$$

$$\underline{\underline{V(0, B) = \max_{h(0), h(1)} \sum_{s=0}^1 g^s \sqrt{h(s)} + g^2 \sqrt{B(2)}}}$$

c) Det dynamiske programmeringsprinsippet (DPP) sier

$$\text{at } \underline{\underline{V(1, B) = \max_{h(1)} g \sqrt{h(1)} + V(2, B(2))}}$$

$$\text{og } \underline{\underline{V(0, B) = \max_{h(0)} (g \sqrt{h(0)} + V(1, B(1)))}}$$

d) Fra c) har vi at

$$V(1, B) = \max_{h(1)} f\sqrt{h(1)} + V(2, B(2))$$

$$\text{og } B(2) = R(B(1) - h(1)) \quad \text{og } V(2, B) = f^2 \sqrt{B(2)}$$

hvisatt gir dette

$$V(1, B) = \max_{h(1)} f\sqrt{h(1)} + f^2 \sqrt{R(B - h(1))}$$

$$= \max_{h(1)} f\sqrt{h(1)} + f^2 \sqrt{R} \sqrt{B - h(1)}$$

Definer $f(x) = f\sqrt{x} + f^2 \sqrt{R} \sqrt{B - x}$ og maksimer
denne.

$$f'(x) = f \frac{1}{2\sqrt{x}} + f^2 \sqrt{R} \frac{1}{2\sqrt{B-x}} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = f\sqrt{R} \frac{1}{\sqrt{B-x}} \Rightarrow x = \frac{1}{f^2 R} (B - x)$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{\frac{1}{f^2 R} B}{1 + \frac{1}{f^2 R}} = \frac{B}{1 + f^2 R}$$

$f^2 R > 0 \Rightarrow 0 < x^* < B$, og dermed vil

$$\underline{\underline{h^*(1) = \frac{B(1)}{1 + f^2 R}}}$$

(vi trenger ikke godtgjøre at dette er et maksimumspunkt)

Finnur $V(1, B)$, som vi skal bruke til å finne $h^*(1)$ med DPP.

$$\begin{aligned}
 V(1, B) &= \sqrt{h^*(1)} + \sqrt{R} \sqrt{B - h^*(1)} \\
 \text{B(1) = B} \quad \sqrt{B} &= \sqrt{1+r^2 R} + \sqrt{R} \sqrt{B - \frac{B}{1+r^2 R}} \\
 &= \sqrt{B} + \sqrt{R} \sqrt{\frac{(1+r^2 R)B - B}{1+r^2 R}} = \sqrt{B} + \sqrt{R} \sqrt{\frac{r^2 R B}{1+r^2 R}} \\
 &= \sqrt{B} + \sqrt{R} \frac{r R \sqrt{B}}{\sqrt{1+r^2 R}} \\
 &= \sqrt{B} (1 + \frac{r^2 R}{1+r^2 R}) \\
 &= \sqrt{1+r^2 R} \sqrt{B}
 \end{aligned}$$

Bruker dette til å finne $h^*(1)$: DPP sier

$$\begin{aligned}
 V(1, B) &= \max_{h(1)} \sqrt{h(1)} + \sqrt{R} \sqrt{B - h(1)} \\
 &= \max_{h(1)} \sqrt{h(1)} + \sqrt{1+r^2 R} \sqrt{B(1)} \\
 &\quad \quad \quad = R(B(1) - h(1)) = R(B - h(1)) \\
 &= \max_{h(1)} \sqrt{h(1)} + \sqrt{1+r^2 R} \sqrt{R} \sqrt{B - h(1)}
 \end{aligned}$$

Definerer $R(x) = \sqrt{x} + \sqrt{R} \sqrt{1+r^2 R} \sqrt{B-x}$, og

maksimeres denne :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + f\sqrt{R}\sqrt{1+f^2R} \frac{1}{2\sqrt{B-x}} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{f\sqrt{R}\sqrt{1+f^2R}}{B} \frac{1}{\sqrt{B-x}} \Rightarrow x = \frac{1}{f^2R(1+f^2R)} (B-x)$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{B}{1+f^2R+f^4R^2}$$

lgjøn $f^2R > 0$, så
 $1+f^2R+f^4R^2 > 1$ og
 dermed $0 < x^* < 1$.

$$\Rightarrow h^*(C) = \frac{B}{1+f^2R+f^4R^2}$$

4

a)

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix}$$

er vektoren av kapasiteter som del
 utstiller i hver ledasjon

$$\underline{\hat{r}} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \vdots \\ \hat{r}_d \end{bmatrix}$$

er vektoren av forventet kapasitetsfaktorer i
 hver ledasjon

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1d} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1d} & \dots & \dots & c_{dd} \end{bmatrix}$$

er Varians-kovariansmatrisen av
 kapasitetsfaktorer i hver ledasjon

og mellem klasserne.

$\hat{\mu}_E$ er forventet middelværdi, $\text{Var}(E)$ er variansen til middelværdi.

3) Produktions varians når den middelerer $\underline{\omega}$ er $\underline{\omega}^T \underline{C} \underline{\omega}$. Hvis vi vedger $\underline{\omega} = \underline{\bar{\omega}}$, så blir produktions varians

$$\underbrace{\left(\hat{\mu}_E (C + \hat{\underline{r}} \hat{\underline{r}}^T)^{-1} \hat{\underline{r}} \right)^T}_{\text{tall}} \underbrace{\left(\hat{\mu}_E (C + \hat{\underline{r}} \hat{\underline{r}}^T)^{-1} \hat{\underline{r}} \right)}_{\text{tall}}$$
$$= \hat{\mu}_E^2 \underbrace{\left((C + \hat{\underline{r}} \hat{\underline{r}}^T)^{-1} \hat{\underline{r}} \right)^T C (C + \hat{\underline{r}} \hat{\underline{r}}^T)^{-1} \hat{\underline{r}}}$$

og kan man litt mer en matriseregning

$$= \hat{\mu}_E^2 \underline{\hat{\underline{r}}}^T (C + \hat{\underline{r}} \hat{\underline{r}}^T)^{-1} C (C + \hat{\underline{r}} \hat{\underline{r}}^T)^{-1} \hat{\underline{r}}$$

5

a) Når $E_{\text{inn}} > E_{\text{ut}}$, vil det komme mer energi inn fra sola enn jorda stråler ut. Da blir energien på jorda, og derfor også temperaturen også.

Ved likevekt, vil $E_{\text{inn}} = E_{\text{ut}}$

$$\Rightarrow \cancel{\pi R^2} S(1-\alpha) = 4\cancel{\pi R^2} \sigma T^4 \epsilon$$

$$\Rightarrow 4\sigma T^4 \epsilon = S(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow T^4 = \frac{S(1-\alpha)}{4\sigma \epsilon} \Rightarrow T = \left(\frac{S(1-\alpha)}{4\sigma \epsilon} \right)^{1/4}$$

b)

Hvis ϵ øker, betyr det at mer av energien som jorda utstråler slipper ut gjennom atmosfæren. Derfor er det mindre drivhusgasser i atmosfæren, altså gasser som fanger utstråling. Økende ϵ betyr derfor at vi har reduert utklippene.

Øker ϵ , vil nevnen øke og dermed vil brøken $\frac{S(1-\alpha)}{4\sigma \epsilon}$ bli mindre. Vi konkluderer med at temperaturen T går ned.
