

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1050 — Matematikk for anvendelser 1

Eksamensdag: Mandag 2. desember 2024

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Formelark

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og ett A4-ark med valgfri håndskrevet eller trykt tekst på begge sider.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

OPPGAVE 1 Betrakt funksjonen

$$f(x, y) = x^2y - 2xy + \frac{1}{2}y^2$$

definert over hele $\mathbb{R}^2$.

- a) Finn de kritiske punktene til f .
- b) Avgjør om de kritiske punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter.
- c) Finn det bestemte integralet av funksjonen f over rektangelet

$$[0, 1] \times [0, 2]$$

(Fortsettes på side 2.)

Løsning.

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2y = 2y(x - 1) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x + y = 0$$

Den første likningen gir 1) $x = 1$ eller 2) $y = 0$. Setter vi dette inn i den andre likningen får vi i tilfelle 1) $-1 + y = 0$, dvs. $y = 1$, og i tilfelle 2) $x(x - 2) = 0$, som betyr $x = 0$ eller $x = 2$. Altså tre kritiske punkter, $(1, 1)$, $(0, 0)$ og $(2, 0)$.

b) Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - 2$$

Det gir

$$H(0, 0) = 0 \cdot 1 - (-2)^2 = -4$$

$$H(1, 1) = 2 \cdot 1 - 0^2 = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$$

$$H(2, 0) = 0 \cdot 1 - 2^2 = -4$$

Det betyr at $(1, 1)$ er et lokalt minimumspunkt, mens $(0, 0)$ og $(2, 0)$ er sadelpunkter.

c)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 x^2 y - 2xy + \frac{1}{2} y^2 dy dx &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 - xy^2 + \frac{1}{6} y^3 \right]_0^2 dx \\ &= \int_0^1 2x^2 - 4x + \frac{4}{3} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3} x \right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

OPPGAVE 2 En plan kurve C er gitt ved parameterframstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (2 - \cos t, -1 + \sin t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

- a) Finn buelengden av kurven C .
- b) Finn integralet av funksjonen $f(x, y) = xy - x + y$ langs kurven C .

Løsning.

- a) Vi regner først ut

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \|(\sin t, \cos t)\| = 1$$

Det gir

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

- b) Vi har

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}(t)) &= (2 - \cos t)(-1 + \sin t) - (2 - \cos t) + (-1 + \sin t) \\ &= -5 + 3 \sin t + 2 \cos t - \sin t \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C f(\mathbf{r}(t)) \, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-5 + 3 \sin t + 2 \cos t - \sin t \cos t) \cdot 1 \, dt \\ &= \left[-5t - 3 \cos t + 2 \sin t - \frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-5 \frac{\pi}{2} - 0 + 2 - \frac{1}{2} \right) - \left(-5 \cdot 0 - 3 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \\ &= -\frac{5\pi}{2} + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 4.)

OPPGAVE 3 Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2 - 2, 2xy - 2)$.

a) Vis at feltet $\mathbf{F}$ er konservativt.

b) Finn en potensialfunksjon f for $\mathbf{F}$ som oppfyller $f(1, 1) = 0$.

Løsning.

a)

$$\frac{\partial(2xy - 2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 + y^2 - 2)}{\partial y} = 2y - 2y = 0$$

b) Vi har

$$\int (x^2 + y^2 - 2) dx = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - 2x + g(y)$$

og videre

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{3}x^3 + xy^2 - 2x + g(y) \right) = 2xy + g'(y) = 2xy - 2$$

som betyr at $g(y) = -2y + C$ og $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - 2x - 2y + C$.

Det betyr

$$f(1, 1) = \frac{1}{3} + 1 - 2 - 2 + C = 0$$

og $C = \frac{8}{3}$.

OPPGAVE 4

- a) En modell av et dynamisk system er gitt ved

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 2y\end{aligned}$$

Forklar hva slags natur likevektspunktet $(0, 0)$ har og beskriv hvordan typiske løsningskurver for modellen ser ut.

- b) Vis at den parametriserte kurven

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos t + \sin t \\ y(t) &= \cos t + 3 \sin t\end{aligned}$$

er en løsning for modellen som oppfyller $x(0) = y(0) = 1$.

- c) Vis at nivåkurvene til funksjonen
- $g(x, y) = 5x^2 - 4xy + y^2$
- utgjør løsningskurver for modellen. (Hint: Vis at gradienten til
- g
- står normalt på vektorfeltet som modellen definerer.)

Løsning.

- a) For systemet har vi

$$\beta = \frac{a+d}{2} = 0, \quad \mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc = 4^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 5 = -4 < 0$$

som betyr at vi har et sirkulær t forløp.

- b)

$$\begin{aligned}x'(t) &= -\sin t + \cos t = 2(\cos t + \sin t) - (\cos t + 3 \sin t) \\ y'(t) &= -\sin t + 3 \cos t = 5(\cos t + \sin t) - 2(\cos t + 3 \sin t)\end{aligned}$$

$$\text{og } x(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1, \quad y(0) = \cos 0 + 3 \sin 0 = 1.$$

- c) Vi har

$$\nabla g = (10x - 4y, -4x + 2y)$$

Vektorfeltet i modellen er gitt ved

$$(x'(t), y'(t)) = (2x - y, 5x - 2y)$$

Det gir

$$\nabla g \cdot (x'(t), y'(t)) = (10x - 4y, -4x + 2y) \cdot (2x - y, 5x - 2y) = 0$$