

MAT 1050

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 7. november 2024, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av $\text{\LaTeX}$). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer. Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt.

Sammarbeidsmulighet for denne obligatoriske oppgaven: Det er åpent for at inntil 3 studenter kan samarbeide om en felles besvarelse. Alle 3 skal levere inn hver sin besvarelse i Canvas og det skal framgå tydelig hvem man har samarbeidet med om besvarelsen. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

For å få godkjent oppgaven må den leveres inn i Canvas. Du velger selv hvor mye du vil svare på, og du vil få tilbakemelding på det du har levert. Oppgaven er utformet på samme måte som en eksamensoppgave, og vil gi deg god trening i det du kommer til å møte på eksamen. I tillegg til tilbakemeldinger vil du få en karakter på oppgaven. Karakteren har ingen betydning ut over å gi et innblikk i hvordan besvarelsen ville ha blitt evaluert. Karakteren blir gitt på bakgrunn av de delspørsmålene som er besvart. Blanke oppgaver vil ikke telle med i vurderingen.

Jeg ønsker å bli evaluert på følgende delspørsmål (kryss av):

1a)	1b)	1c)	2a)	2b)	2c)	3a)	3b)	4a)	4b)
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

OPPGAVE 1 Gitt en funksjon $f(x,y) = x^3 + 6y - 3xy^2$

- Finn de partiellderiverte til funksjonen $f(x,y)$. Regn også ut Hesse-determinanten $H(x,y)$.
- Finn de kritiske punktene til funksjonen $f(x,y)$ og avgjør om de er maksimums-, minimums- eller sadelpunkter.
- Finn det bestemte integralet av funksjonen over rektangelet

$$[0, 2] \times [0, 1]$$

OPPGAVE 2 Gitt et plant vektorfelt $\mathbf{F}(x,y) = (6xy - 6, 3x^2 - 3y^2)$

- Vis at normalfeltet $\mathbf{F}^\perp(x,y) = (3x^2 - 3y^2, 6 - 6xy)$ til $\mathbf{F}$ er konservativt.
- Finn en potensialfunksjon $f(x,y)$ til normalfeltet $\mathbf{F}^\perp$.
- Finn en kurve som går gjennom punktet $(1, 1)$ og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet $\mathbf{F}$.

OPPGAVE 3 Et område Q i xy -planet er gitt ved

$$0 \leq y \leq 1 + x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

- a) Vis at arealet av Q er lik $\frac{8}{3}$.
- b) Finn koordinatene til tyngdepunktet til Q .

OPPGAVE 4 (Innholdet i denne oppgaven blir ikke gjennomgått på forelesning før rett før innlevering. Den kan derfor føles ekstra vanskelig. Men prøv allikevel. Les gjerne i kompendiet og bruk formelsamlingen som er heftet med Obligen.)

Gitt et system av lineære differensiallikninger

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y\end{aligned}$$

- a) Vis at $x(t) = e^{2t}(\cos t + \sin t)$, $y(t) = 2e^{2t} \sin t$ er en løsning av systemet med initialbetingelsen $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.
- b) Hva slags likevektspunkt for systemet er $(x, y) = (0, 0)$.

FORMELSAMLING

Derivasjonsregler

Spesielle: $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
 $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

Generelle: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
 $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

Spesielle funksjoner

Eksponensialfunksj.: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmer: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

Trigonometriske: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1

Integrasjonsregler

Spesielle: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, $n \neq -1$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$, $x > 0$
 $\int e^x dx = e^x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$

Generelle: $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
 $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$
 $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$

Kompleks konjugert: $\bar{z} = a - ib = re^{-i\theta}$

Funksjoner av flere variable

Nivåkurver: $f(\mathbf{x}) = C$

Gradient: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$

Annenderiverttest: $H(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2$.

i) Hvis $D < 0$, er (a, b) et sadelpunkt.

ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimum.

iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimum.

Parametriserte kurver og linjeintegraler

Buelengde: $s = L(a, b) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt$

Linjeintegral av funksjon: $\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt$

Linjeintegral av vektorfelt: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$

Integral av gradient: $\int_{\mathcal{C}} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$

Virvling for plant vektorfelt $\mathbf{F} = (P, Q)$: $\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

Multiple integraler

Areal og tyngdepunkt: $A = \iint_D 1 dx dy$

$$\bar{x}A = \iint_D x dx dy \quad \bar{y}A = \iint_D y dx dy$$

Greens teorem: $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy$

Dynamiske systemer

System: $x'(t) = ax + by, y'(t) = cx + dy$

Diskriminant: $\mathcal{D} = (a - d)^2 + 4bc$

Eigenverdier: $\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2}$

Likevektspunkter:

$\mathcal{D} > 0, \lambda_1, \lambda_2 > 0$: frastøtende likevektspunkt

$\mathcal{D} > 0, \lambda_1, \lambda_2 < 0$: tiltrekkende likevektspunkt

$\mathcal{D} > 0, \lambda_2 < 0 < \lambda_1$: bifurkasjon, én tiltrekkende linje

$\mathcal{D} < 0, \frac{a+d}{2} > 0$: utoverrettet spiral

$\mathcal{D} < 0, \frac{a+d}{2} < 0$: innoverrettet spiral