

LØSNINGSFORSLAG, OBLIG 2, MAT 1050

OPPGAVE 1 Gitt en funksjon $f(x, y) = x^3 + 6y - 3xy^2$

- a) Finn de partiellderiverte til funksjonen $f(x, y)$. Regn også ut Hesse-determinanten $H(x, y)$.
- b) Finn de kritiske punktene til funksjonen $f(x, y)$ og avgjør om de er maksimums-, minimums- eller sadelpunkter.
- c) Finn det bestemte integralet av funksjonen over rektangelet

$$[0, 2] \times [0, 1]$$

Løsning.

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6 - 6xy$$

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 6x \cdot (-6x) - (6y)^2 = -36(x^2 + y^2)$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - y^2) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6(1 - xy) = 0$$

gir $y = \pm x$ og $1 - x(\pm x) = 1 \pm x^2 = 0$. Det gir kritiske punkter $(x, y) = (1, 1)$ og $(x, y) = (-1, -1)$. Innsatt i Hesse-formen

$$H(1, 1) = -36(1^2 + 1^2) = -72 < 0$$

$$H(-1, -1) = -36((-1)^2 + (-1)^2) = -72 < 0$$

som betyr to sadelpunkter.

c)

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^1 x^3 + 6y - 3xy^2 \, dy \, dx &= \int_0^2 [x^3 y + 3y^2 - xy^3]_0^1 \, dx \\ &= \int_0^2 x^3 + 3 - x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + 3x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= 4 + 6 - 2 = 8 \end{aligned}$$

OPPGAVE 2 Gitt et plant vektorfelt $\mathbf{F}(x, y) = (6xy - 6, 3x^2 - 3y^2)$

- a) Vis at normalfeltet $\mathbf{F}^\perp(x, y) = (3x^2 - 3y^2, 6 - 6xy)$ til $\mathbf{F}$ er konservativt.
- b) Finn en potensialfunksjon $f(x, y)$ til normalfeltet $\mathbf{F}^\perp$.
- c) Finn en kurve som går gjennom punktet $(1, 1)$ og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet $\mathbf{F}$.

Løsning.

a)

$$\frac{\partial(6 - 6xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2 - 3y^2)}{\partial y} = -6y + 6y = 0$$

b)

$$f(x, y) = \int 3x^2 - 3y^2 dx = x^3 - 3xy^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3xy^2 + g(y)) = -6xy + g'(y) = 6 - 6xy$$

betyr at $g'(y) = 6$ og $g(y) = 6y + C$, dvs $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 6y + C$

- c) Nivåkurvene til potensialfunksjonen f er parallell med feltet $\mathbf{F}$, og en nivåkurve som går gjennom $(1, 1)$ må oppfylle

$$f(1, 1) = 1 - 3 + 6 + C = 0$$

dvs. $C = -4$ og kurven er gitt ved

$$x^3 - 3xy^2 + 6y - 4 = 0$$

OPPGAVE 3 Et område Q i xy -planet er gitt ved

$$0 \leq y \leq 1 + x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

- a) Vis at arealet av Q er lik $\frac{8}{3}$.
b) Finn koordinatene til tyngdepunktet til Q .

Løsning.

- a) Arealet er gitt ved

$$\int_{-1}^1 \int_0^{1+x^2} dy dx = \int_{-1}^1 1 + x^2 dx = [x + \frac{1}{3}x^3]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$$

- b) Området Q er symmetrisk om y -aksen, som betyr at $\bar{x} = 0$. Videre har vi

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{3}{8} \int_{-1}^1 \int_0^{1+x^2} y dy dx = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 [\frac{1}{2}y^2]_0^{1+x^2} dx \\ &= \frac{3}{16} \int_{-1}^1 1 + 2x^2 + x^4 dx = \frac{3}{16} [x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5]_{-1}^1 \\ &= \frac{3}{8} (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{3}{8} \frac{28}{15} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

OPPGAVE 4 (Innholdet i denne oppgaven blir ikke gjennomgått på forelesning før rett før innlevering. Den kan derfor føles ekstra vanskelig. Men prøv allikevel. Les gjerne i kompendiet og bruk formelsamlingen som er heftet med Obligen.)

Gitt et system av lineære differensiallikninger

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y\end{aligned}$$

- a) Vis at $x(t) = e^{2t}(\cos t + \sin t)$, $y(t) = 2e^{2t} \sin t$ er en løsning av systemet med initialbetingelsen $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.
- b) Hva slags likevektspunkt for systemet er $(x, y) = (0, 0)$.

Løsning.

a)

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2e^{2t}(\cos t + \sin t) + e^{2t}(-\sin t + \cos t) = e^{2t}(3\cos t + \sin t) \\ y'(t) &= 4e^{2t} \sin t + 2e^{2t} \cos t = e^{2t}(2\cos t + 4\sin t)\end{aligned}$$

Vi har også

$$\begin{aligned}3x - y &= 3e^{2t}(\cos t + \sin t) - 2e^{2t} \sin t = e^{2t}(3\cos t + \sin t) \\ 2x + y &= 2e^{2t}(\cos t + \sin t) + 2e^{2t} \sin t = e^{2t}(2\cos t + 4\sin t)\end{aligned}$$

Dette viser at $x(t) = e^{2t}(\cos t + \sin t)$, $y(t) = 2e^{2t} \sin t$ er en løsning av systemet. Setter vi inn $t = 0$ får vi $x(0) = e^0(\cos 0 + \sin 0) = 1$, $y(0) = 2e^0 \sin 0 = 0$.

b) Vi har

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{a+d}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \\ \mathcal{D} &= (a-d)^2 + 4bc = (3-1)^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 4 - 8 = -4\end{aligned}$$

som betyr at systemet danner en frastøtende spiral.