

MAT 1050, øvelsesoppgaver

Her er en liste med øvelsesoppgaver om kurveintegraler og buelengde. Buelengde innebærer å regne ut integralet av den konstante funksjonen 1 langs kurven.

1. Regn ut integralet $\int_{\gamma} xy + y \, ds$, langs kurven $\gamma(t) = (3t, 4t)$ hvor $0 \leq t \leq 1$.
2. Regn ut integralet $\int_{\gamma} x^2 + y^2 + z^2 \, ds$, langs kurven $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hvor $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.
3. Regn ut buelengden av kurven $\gamma(t) = (1 + \cos 2t, 2 + \sin 2t)$ hvor $0 \leq t \leq \pi$.
4. Regn ut integralet $\int_{\gamma} xy \, ds$ hvor γ er kurven i oppgave 3. (Det kan være nyttig å bruke at $\sin 2t \cos 2t = \frac{1}{2} \sin 4t$.)
5. Regn ut integralet $\int_{\gamma} xy - x + y \, ds$, langs kurven $\gamma(t) = (2 - \cos t, -1 + \sin t)$ hvor $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
6. Regn ut buelengden til kurven i oppgave 5.
7. Regn ut integralet $\int_{\gamma} 2xy \, ds$, langs kurven $\gamma(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t, 2 \sin t \cos t)$ hvor $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
8. Regn ut buelengden til kurven $\gamma(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})$ hvor $0 \leq t \leq 5$.

Og her er noen oppgaver med dobbeltintegraler:

9. Et område Q i xy -planet er gitt ved

$$0 \leq y \leq 1 + x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

- a) Vis at arealet av Q er lik $\frac{8}{3}$.
- b) Finn koordinatene til tyngdepunktet til Q .

10. Betrakt funksjonen

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - 2x - 2y$$

definert over kvadratet $Q = [-2, 2] \times [-2, 2]$ i (x, y) -planet. Beregn dobbeltintegralet av f over området Q .

11. La D være området i (x, y) -planet over x -aksen og under grafen til funksjonen $g(x) = 1 - x^2$.

- a) Vis at arealet av området D er $\frac{4}{3}$.
- b) Regn ut dobbeltintegralet av funksjonene

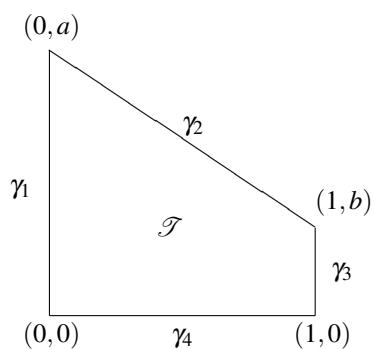
$$f(x, y) = x \quad \text{og} \quad g(x, y) = y$$

over området D og bestem koordinatene til tyngdepunktet til D .

12. La D være området i (x, y) -planet avgrenset av x -aksen, linjene $x = -\ln 2$ og $x = \ln 2$, og grafen til funksjonen $f(x) = e^x$.

- Vis at arealet til D er $\frac{3}{2}$.
- Finn x -koordinaten til tyngdepunktet til området D .

13.



Vi har gitt et trapes $\mathcal{T}$, som illustrert på figuren, og hvor vi antar at $b < \frac{a}{2}$. Trapeset er gitt ved $\mathcal{T} = [0, 1] \times [0, h(x)]$, hvor $h(x) = a - (a - b)x$.

- Vis at arealet til trapeset er gitt ved $\frac{1}{2}(a + b)$ ved å integrere konstantfunksjonen $g(x, y) = 1$ over området $\mathcal{T}$.
- Finn koordinatene til tyngdepunktet til $\mathcal{T}$.

Fasit

1. 30 2. $\frac{10}{3}$ 3. 2π 4. 4π 5. $\frac{9}{2} - \frac{5\pi}{2}$ 6. $\frac{\pi}{2}$ 7. 0 8. $\frac{343}{27}$

9. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{7}{10}$. 10. 0 11. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{2}{5}$. 12. $\frac{5}{3} \ln 2 - 1$

13. $\bar{x} = \frac{a+2b}{3(a+b)}, \bar{y} = \frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$