# FORMELSAMLING FOR MAT1050

## Derivasjonsregler

**Spesielle:** $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

**Generelle:** $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

## Spesielle funksjoner

**Eksponensialfunksj.**: $a^x a^y = a^{x+y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $(a^x)^y = a^{xy}$
**Logaritmer**: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$, $\ln(x^a) = a \ln x$
**Trigonometriske**: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

**Eksakte verdier**:

| $v$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin v$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | 0 |
| $\cos v$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 | -1 |

## Integrasjonsregler

**Spesielle:** $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, $n \neq -1$ $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$, $x > 0$
$\int e^x \, dx = e^x + C$, $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$, $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$
**Generelle:** $\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$
$\int f'(g(x)) g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$

## Komplekse tall

**Skrivemåter**: $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
**Kompleks konjugert**: $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$
**Eksponentialfunksjonen**: $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$

## Funksjoner av flere variable

**Nivåkurver**: $f(\mathbf{x}) = C$
**Gradient**: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$

**Annenderiverttesten**: Anta at $(a, b)$ er et kritisk punkt og la
$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$, $D = AC - B^2$. Da gjelder:

i) Hvis $D < 0$, er $(a, b)$ et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er $(a, b)$ et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er $(a, b)$ et lokalt maksimum.

## Parametriserte kurver og linjeintegraler

**Tangent:** $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$
**Buelengde:** $B = \int_C ds = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$
**Linjeintegral av funksjon:** $\int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$
**Linjeintegral av vektorfelt:** $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
**Virvling for plant vektorfelt:** $\mathbf{F} = (P, Q)$: $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
**Nødvendig betingelse for konservativt felt:** $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = 0$.

## Multiple integraler

**Polarkoordinater:** $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,
$$\iint_{D(x,y)} f\, dx\, dy = \iint_{D(r,\theta)} f r\, dr\, d\theta$$
**Areal og tyngdepunkt:** $A = \iint_D 1\, dx\, dy$
$$\overline{x}A = \iint_D x\, dx\, dy \qquad \overline{y}A = \iint_D y\, dx\, dy$$
**Greens teorem:** $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_C P\, dx + Q\, dy$

## Dynamiske systemer

**System:** $x'(t) = ax + by$, $y'(t) = cx + dy$
**Diskriminant:** $\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$
**Egenverdier**: $\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$
For $\mathcal{D} < 0$: $\beta = \frac{a+d}{2}$

$\mathcal{D} > 0,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0:$ frastøtende likevektspunkt

$\mathcal{D} > 0,\ \lambda_1, \lambda_2 < 0:$ tiltrekkende likevektspunkt

$\mathcal{D} > 0,\ \lambda_2 < 0 < \lambda_1:$ bifurkasjon, én tiltrekkende linje

$\mathcal{D} < 0,\ \beta > 0:$ utoverrettet spiral

$\mathcal{D} < 0,\ \beta < 0:$ innoverrettet spiral

$\mathcal{D} < 0,\ \beta = 0:$ periodiske stabile baner utenfor likevektspunktet