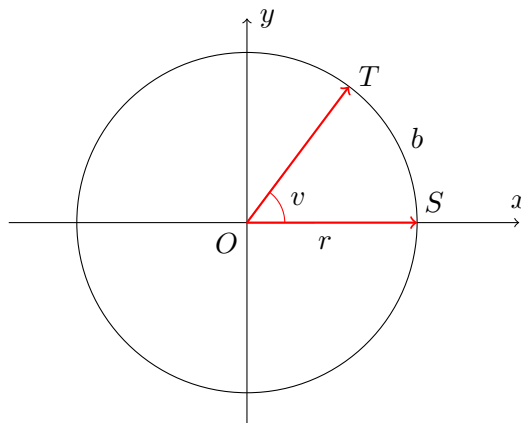


Trigonometriske funksjoner

I dette notatet skal vi se på de trigonometriske funksjonene sinus, cosinus, tangens og cotangens. Med unntak av cotangens er alle disse funksjonene del av R2 i videregående skole, men de er ikke med i R1 som dette kurset bygger på. Allikevel har du nok truffet på dem før i geometridelen av 1T, men der behandles de egentlig ikke som funksjoner, men som hjelpemidler til å finne vinkler og sidelengder i trekanter.

1 Radianer

I dagliglivet og i elementær geometri måler vi størrelsen til en vinkel i grader. Det er et litt merkelig målesystem der målet til en rett vinkel er 90° og en hel omdreining er 360° . De underlige tallene skyldes at systemet går helt tilbake til de gamle babylonerne som brukte en blanding av et sekstitalssystem og et titallssystem i sin matematikk. Når vi skal måle vinkler i mer teoretiske sammenhenger, lønner det seg å bruke et system som ikke bygger på historiske tilfeldigheter, men på velvalgte matematiske størrelser. Vi skal se på et slikt system der vinklene måles i noe som kalles *absolutt vinkelmål* eller (kortere og vanligere) *radianer*.



Figur 1: En vinkel v som fremkommer ved dreining

Siden vi skal være interessert i negative vinkler og vinkler som er større enn 360° , lønner det seg å tenke på vinkler som noe som fremkommer gjennom dreininger. Figur 1 viser en slik vinkel v som fremkommer ved at vi dreier spissen til en pil med lengde r et stykke b langs sirkelperiferien fra S

til T (vi dreier altså *mot* solen, i det som kalles *positiv omløpsretning*). Dess mer vi dreier, dess større blir *buelengden* b og dess større blir vinkelen v . Et naturlig mål på størrelsen til v er derfor

$$v = \frac{b}{r}.$$

Dette kalles det *absolutte vinkelmålet* til v eller v *målt i radianer*. Legg merke til at vi med buelengden b mener avstanden fra startpunktet S til endepunktet T *målt langs sirkelperiferien* og ikke i luftlengde. Legg også merke til at vi kan få vinkler større enn 360° ved å rotere pilen mer enn én gang rundt origo, og at vi kan få negative vinkler ved å rotere pilen i motsatt retning, i negativ omløpsretning.

Det er lett å regne ut det absolutte vinkelmålet til de vinklene vi er mest vant til. Lar vi v være en hel omdreining (altså en vinkel på 360°), blir buelengden lik omkretsen til sirkelen, dvs. $b = 2\pi r$. Dermed blir det absolutte vinkelmålet

$$v = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

En rett vinkel er en fjerdedel av dette, og har følgelig absolutt vinkelmål $\frac{\pi}{2}$.

Det finnes en generell omregningsformel fra grader til radianer. Anta at vi har en vinkel som har absolutt vinkelmål v , men som i grader måles til v° . Siden vinkelen utgjør en like stor del av en hel omdreining uansett om vi måler i radianer eller grader, må vi ha

$$\frac{v}{2\pi} = \frac{v^\circ}{360^\circ}$$

som gir

$$v = \frac{\pi}{180^\circ} v^\circ.$$

Bruker vi denne formelen på noen av de vinklene vi bruker oftest, får vi denne tabellen.

v°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°	720°
v	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	4π

Tabell 1: Omregning fra grader til radianer

Siden vi får negative vinkler ved å dreie i motsatt retning, kan vi også bruke tabellen ovenfor på negative vinkler. En vinkel på -30° er derfor det samme som en vinkel på $-\frac{\pi}{6}$ radianer.

Med radianer er det lett å regne ut arealet til en sirkelsektor, slik som området i figur 1 avgrenset av linjestykkene OS og OT og buen b . Siden

arealet A_{seg} av dette segmentet utgjør en like stor del av hele sirkelarealet πr^2 som v utgjør av en hel omdreining 2π , har vi

$$\frac{A_{\text{seg}}}{\pi r^2} = \frac{v}{2\pi}$$

som gir

$$A_{\text{seg}} = \frac{1}{2} r^2 v \quad (1)$$

(dette forutsetter at vi bruker en vinkel v som ligger i første omløp, altså $0 \leq v \leq 2\pi$).

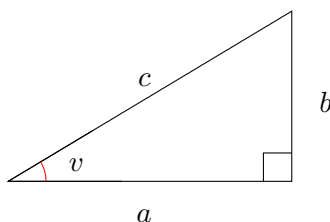
Konvensjon: I resten av MAT1080 er alle vinkler målt i radianer hvis ikke noe annet er eksplisitt sagt.

Oppgaver til seksjon 1

1. Sjekk at tallene i tabell 1 stemmer.
2. Regn om følgende vinkler til radianer: 15° , 75° , 135° , 270° , 540° , -45° , -225° . Lag figurer som viser hvor vinklene ligger.
3. Regn om følgende vinkler gitt i radianer til grader: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{3}$. Lag figurer som viser hvor vinklene ligger.
4. En sirkel har radius 3. Hvor stort er sirkelsegmentet utspent av en vinkel på 120° ?

2 Trekantberegninger

I denne seksjonen vil jeg minne raskt om hvordan trigonometriske funksjoner brukes i trekantberegninger. Vi begynner med en rettvinklet trekant med kateter a og b og hypotenus c som vist i figur 2.



Figur 2: En rettvinklet trekant

Vi definerer sinus, cosinus og tangens til vinkelen v på samme måte som i 1P:

$$\sin v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusen}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos v = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenusen}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{b}{a}$$

Det er en fjerde trigonometrisk funksjon som det kan være greit å vite om, selv om den ikke brukes i videregående skole. Den heter *cotangens* og er definert ved

$$\cot v = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{motstående katet}} = \frac{a}{b}.$$

Legg merke til at

$$\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \tan v,$$

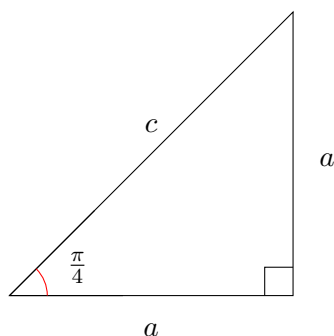
dvs. at

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}.$$

På tilsvarende måte er

$$\cot v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v}.$$

La oss prøve å regne ut noen verdier for disse funksjonene. Hvis $v = \frac{\pi}{4}$ (dvs. v er 45°), får vi en likebeint trekant som i figur 3.



Figur 3: En rettvinklet, likebeint trekant

Ved Pytagoras' setning er

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2},$$

og vi får dermed

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

og

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

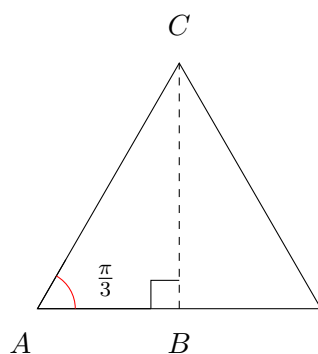
Videre er

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

og

$$\cot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

For å regne ut verdien av de trigonometriske funksjonene til vinklene $\frac{\pi}{3}$ og $\frac{\pi}{6}$ (dvs. til 60° og 30°), lønner det seg å starte med en likesidet trekant som i figur 4.



Figur 4: En likesidet trekant

Hvis sidekanten til den likebeinte trekanten er a , vil linjestykket AB ha lengde $\frac{a}{2}$. Bruker vi Pytagoras' setning på den rettvinklede trekanten $\triangle ABC$, ser vi at lengden til kateten BC er

$$|BC| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dette betyr at

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Cosinus er enklere:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

Det følger også at

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

og

$$\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Hvis vi observerer at $\angle BCA = \frac{\pi}{6}$ (dvs. 30°), kan vi også bruke figur 4 til å regne ut verdiene til de trigonometriske funksjonene anvendt på $\frac{\pi}{6}$:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

og

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vi får også

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{og} \quad \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

(forklar dette!).

Vi oppsummerer resultatene våre i tabell 2. Som du sikkert ser, er det regelmessigheter i tabellen som vi skal komme tilbake til i oppgavene nedenfor.

v	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin v$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos v$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan v$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot v$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabell 2: Verdier i første kvadrant

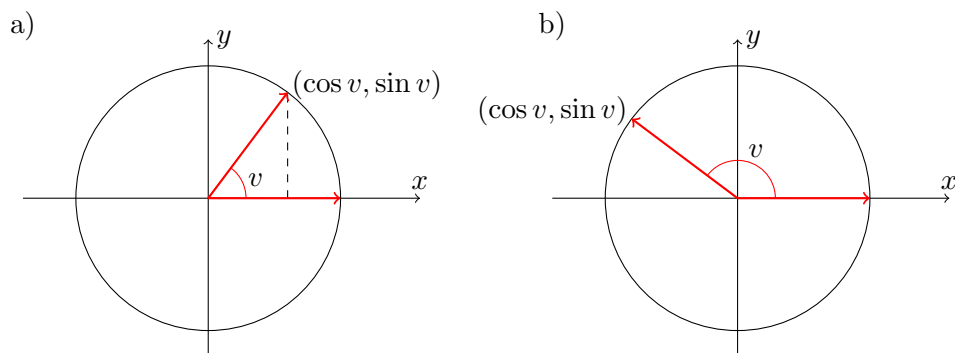
Oppgaver til seksjon 2

1. I en rettvinklet trekant er den motstående kateten til vinkel v 4 cm mens den hosliggende er 3 cm. Finn $\sin v$, $\cos v$, $\tan v$ og $\cot v$.
2. To positive vinkler u og v kalles *komplementvinkler* dersom $u + v = \frac{\pi}{2}$. Vis at dersom u og v er komplementvinkler, så er $\sin u = \cos v$ og $\tan u = \cot v$. Forklar hvordan denne sammenhengen viser seg i tabell 2.

3 Generelle definisjoner av trigonometriske funksjoner

I denne seksjonen skal vi se hvordan vi kan definere de trigonometriske funksjonene for *alle* vinkler v og ikke bare dem som ligger mellom 0 og $\frac{\pi}{2}$. Figur 5 viser ideen. Sirklene i a) og b) har begge radius 1, og ved å bruke definisjonene i forrige avsnitt på vinkelen i a), ser vi at skjæringen mellom

venstre vinkelbein og sirkelen har koordinater $(\cos v, \sin v)$. Vi kan ikke bruke det samme argumentet på vinkelen i b) siden den er større enn $\frac{\pi}{2}$, men vi kan ta et hint: For en hvilken som helst vinkel v , *definerer* vi $\cos v$ og $\sin v$ til å være henholdsvis x -koordinaten og y -koordinaten til skjæringspunktet mellom venstre vinkelbein og enhetssirkelen slik figur 5b) viser.



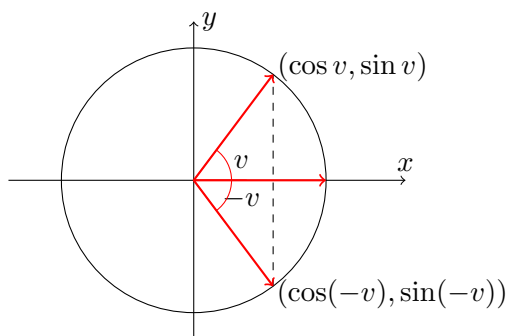
Figur 5: Generell definisjon av sinus og cosinus

Denne definisjonen har noen umiddelbare konsekvenser. Vinkelen $v + 2\pi$ gir det samme skjæringspunkt mellom venstre vinkelbein og enhetssirkelen som vinkelen v ; vi har bare gått én runde ekstra før vi kommer ditt. Dermed er

$$\sin(v + 2\pi) = \sin v \quad \text{og} \quad \cos(v + 2\pi) = \cos v;$$

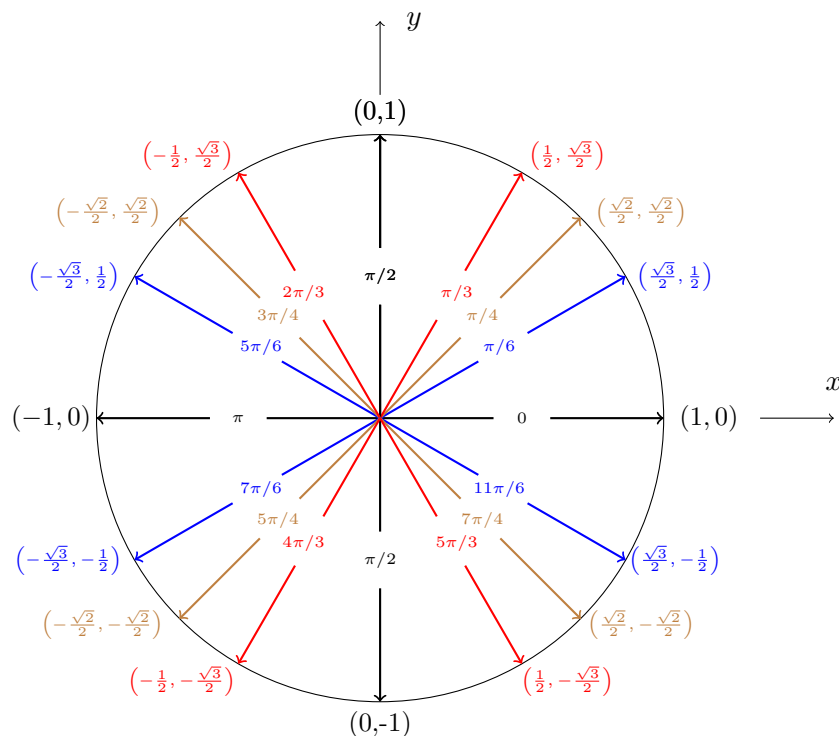
dvs. funksjonene sinus og cosinus er periodiske med periode 2π . Videre ser vi fra figur 6 at hvis vi bytter ut en vinkel v med den motsatte vinkelen $-v$, så bytter $\sin v$ fortegn mens $\cos v$ ikke endrer seg. Vi har altså

$$\sin(-v) = -\sin v \quad \text{og} \quad \cos(-v) = \cos v.$$



Figur 6: Sinus og cosinus til motsatte vinkler

Ved hjelp av tabell 2 og speilinger av denne typen kan vi finne eksakte verdier til mange vinkler i første omløp. Du ser en oversikt i figur 7. Legg merke til at vinkler med samme farge er speilinger av hverandre.



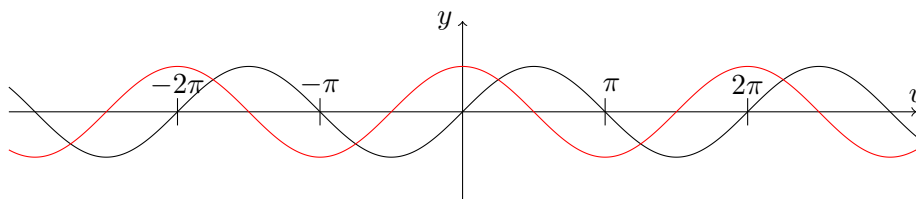
Figur 7: Enhetssirkelen med verdier for sinus og cosinus

Når vi nå har definert sinus og cosinus til vilkårlige vinkler, kan vi definere tangens og cotangens til vilkårlige vinkler ved hjelp av formlene vi fant i forrige seksjon. Vi setter

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \quad \text{og} \quad \cot v = \frac{\cos v}{\sin v}.$$

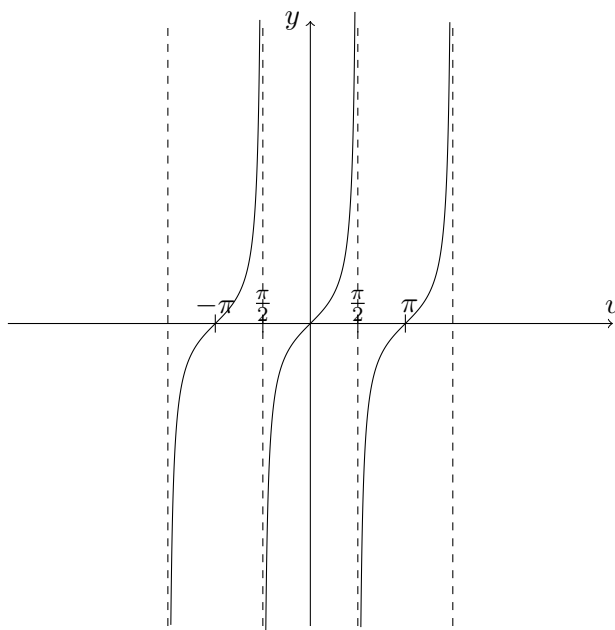
Legg merke til at tangens bare er definert når $\cos v \neq 0$ og cotangens bare når $\sin v \neq 0$.

I de figurene vi hittil har sett på, har v alltid opptrådd som en vinkel, men sinus, cosinus, tangens og cotangens er funksjoner av v og kan fremstilles på vanlig måte med v som koordinaten langs førsteaksen. Figur 8 viser (deler av) grafene til sinus og cosinus fremstilt på denne måten. Som vi allerede har observert, er begge funksjonene periodiske med periode 2π , og vi ser også at grafen til cosinus bare er en forskyvning av grafen til sinus.



Figur 8: Funksjonene $y = \sin v$ (svart) og $y = \cos v$ (rødt).

Figur 9 viser (deler av) grafen til $\tan v$. De stiplede linjene er asymptoter. Legg merk til at selv om sinus og cosinus har periode 2π , så har tangens periode π . Dette er fordi $\sin(v + \pi) = -\sin v$ og $\cos(v + \pi) = -\cos v$. Grafen til $\cot v$ har et lignende utseende, men grafen heller den andre veien, og asymptotene ligger et annet sted (prøv å lage grafen selv).



Figur 9: Funksjonene $y = \tan v$.

Oppgaver til seksjon 3

1. Sjekk så mange du orker av verdiene i figur 7. Gi deg når du føler du har skjønnet systemet.
2. Tegn grafen til cotangens. Det er lov å bruke datamaskin eller lommeregner.
3. Finn sinus, cosinus, tangens og cotangens til vinklene: $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{21\pi}{4}$.

4. To vinkler u, v kalles *supplementvinkler* hvis $u + v = \pi$. Vis at hvis u og v er supplementvinkler, så er $\sin u = \sin v$ og $\cos u = -\cos v$. Hva er forholdet mellom $\tan u$ og $\tan v$?

4 Trigonometriske identiteter

I dette avsnittet skal vi se på trigonometrisk identiteter, dvs. likheter mellom trigonometriske funksjoner som holder for (nesten) alle verdier av v . Den enkleste av disse identitetene er

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1 \quad (2)$$

som holder for alle verdier av v .¹ Grunnen er rett og slett at punktet $(\cos v, \sin v)$ alltid ligger på enhetssirkelen, og at punktene på enhetssirkelen tilfredsstiller ligningen

$$x^2 + y^2 = 1$$

(kjenner du ikke denne formelen, er den lett å utlede med Pytagoras' setning).

Snur vi litt på formel (2), får vi

$$\sin v = \pm \sqrt{1 - \cos^2 v}$$

og

$$\cos v = \pm \sqrt{1 - \sin^2 v},$$

der vi må velge fortegnet $\pm$ avhengig av om vi er i et område der funksjonen $\sin / \cos$ er positiv eller i et område der den er negativ.

De neste formlene er mer kompliserte, men like nyttige. De sier at

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \quad (3)$$

og

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v \quad (4)$$

for alle u og v . Bruker vi disse vinklene med $-v$ istedenfor v og utnytter at $\sin(-v) = -\sin v$ og $\cos(-v) = \cos v$, får vi

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v \quad (5)$$

og

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v. \quad (6)$$

Formlene ovenfor kan brukes til å utlede mange nyttige sammenhenger mellom trigonometriske funksjoner (flere av dem vil du finne blant oppgavene

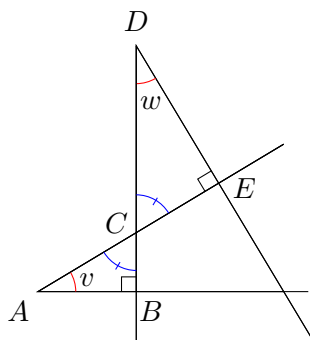
¹Vi har en litt spesiell skrivemåte for potenser av trigonometriske funksjoner: Vi skriver $\sin^2 v$ for annenpotensen $(\sin v)^2$ og tilsvarende for $\cos^2 v$, $\tan^2 v$ og $\cot^2 v$. Skriver vi derimot $\sin v^2$, mener vi $\sin(v^2)$.

til denne seksjonen). Som et lite eksempel kan vi sette $v = \frac{\pi}{2}$ i ligning (3). Da får vi

$$\sin(u + \frac{\pi}{2}) = \sin u \cos \frac{\pi}{2} + \cos u \sin \frac{\pi}{2} = \sin u \cdot 0 + \cos u \cdot 1 = \cos u$$

(sammenlign med figur (8)).

Vi skal utlede ligningene (3) og (4) ved hjelp av et geometrisk resonnement, mens første trenger vi en liten hjelpesetning som du kanskje husker fra skolen: Dersom v og w er to vinkler som er slik at høyre vinkelbein til v står vinkelrett på høyre vinkelbein til w og venstre vinkelbein til v står vinkelrett på venstre vinkelbein til w (man sier ofte at *samsvarende vinkelbein står normalt på hverandre*), så er v og w like store. Figur 10 viser hvorfor det er slik:



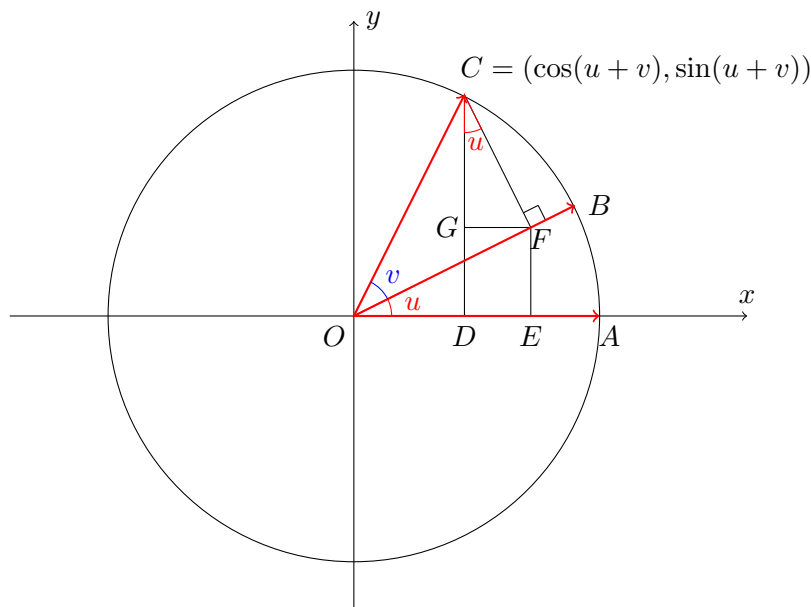
Figur 10: Samsvarende vinkelbein normalt på hverandre.

De to vinklene v og w har samsvarende vinkelbein normalt på hverandre. De to blå vinklene er toppvinkler, og dermed like store. Siden vinkelsummen i de to trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle CED$ er like store (nemlig 180°), så må også v og w være like store.

Vi er nå klare til å bevise formlene (3) og (4) og begynner med den siste.² I figur 11 har sirkelen radius 1, og vi har lagt vinklene $u = \angle AOB$ og $v = \angle BOC$ etter hverandre slik at punktet C har koordinater $(\cos(u + v), \sin(u + v))$. Vår oppgave er å uttrykke disse koordinatene ved hjelp av sinus og cosinus til u og v . Legg merke til at x -koordinaten til C er lengden $|OD|$ til lengdestykket OD , og denne lengden kan vi finne som en differanse

$$|OD| = |OE| - |DE|$$

²Det er ofte enklere å forklare geometriske argumenter muntlig enn skriftlig siden man da kan tegne og peke underveis. Vil du ha en muntlig utledning av argumentene nedenfor, anbefaler jeg denne videoen: <https://uia.cloud.panopto.eu/Panopto/Pages/Viewer.aspx?pid=da4b5552-9755-465d-8635-b0fa00c53208>.



Figur 11: Cosinus til en sum av to vinkler

(alle disse punktene ligger på x -aksen). Lengden $|OE|$ er ikke så vanskelig å finne: Vi ser først fra $\triangle OCF$ at $|OF| = \cos v$. Siden dette er hypotenusen i trekanten $\triangle OFE$, får vi deretter at $|OE| = |OF| \cos u = \cos u \cos v$. For å regne ut $|DE|$ observerer vi først at vinkelen $\angle GCF$ er like stor som vinkel u siden samsvarende vinkelbein står normalt på hverandre. I den rettvinklede trekanten $\triangle GCF$ har hypotenusen CF lengde $\sin v$ (dette kommer av at CF også er en katet i trekanten OFC), og dermed har kateten GF lengde $|CF| \sin v = \sin u \sin v$. Siden $|DE| = |CF|$ har vi dermed

$$\cos(u+v) = |OD| = |OE| - |DE| = \cos u \cos v - \sin u \sin v,$$

som viser formel (4).

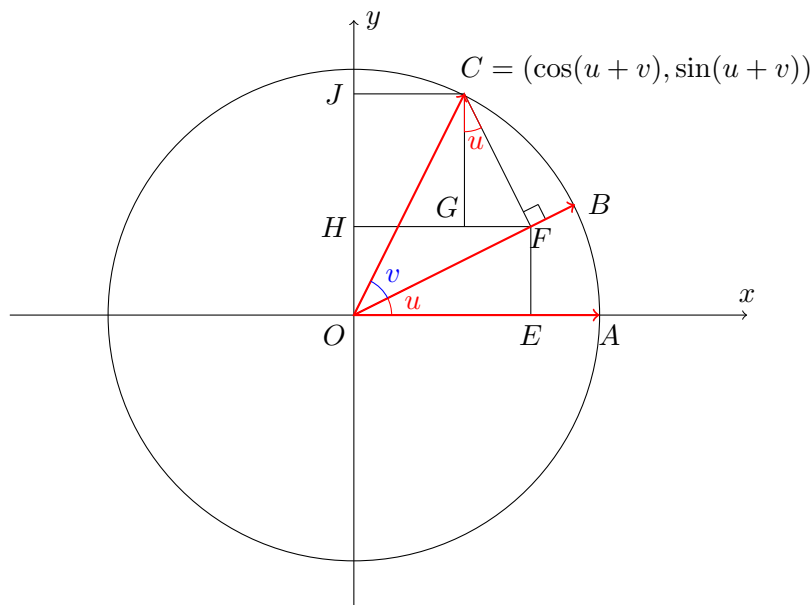
For å finne en formel for $\sin(u+v)$ tar vi utgangspunkt i figur 12 som er den samme som figur 11 bortsett fra at vi nå konsentrerer oss om det som skjer langs y -aksen istedenfor langs x -aksen. Vi observerer først at

$$\sin(u+v) = |OJ| = |OH| + |HJ| = |FE| + |GC|.$$

Fra den rettvinklede trekanten $\triangle OCF$ får vi at $|OF| = \cos v$, og siden dette er hypotenusen i trekanten $\triangle OFE$, følger det at $|FE| = |OF| \sin u = \sin u \cos v$. Fra trekant $\triangle OCF$ ser vi også at $|CF| = \sin v$, og siden dette er hypotenusen i trekanten $\triangle GCF$, får vi $|GC| = |CF| \cos u = \cos u \sin v$. Alt i alt har vi dermed

$$\sin(u+v) = |FE| + |GC| = \sin u \cos v + \cos u \sin v,$$

slik vi skulle vise.



Figur 12: Sinus til en sum av to vinkler

Oppgaver til seksjon 4.

1. Vinkelen v ligger i første kvadrant og har sinus lik 0.6. Hva er $\cos v$?
2. Vinkelen v ligger i andre kvadrant og har $\sin v = 0.4$. Hva er $\cos v$?
3. Vis at $\sin(u + \pi) = -\sin u$ og $\cos(u + \pi) = -\cos u$. Vis også at $\tan(u + \pi) = \tan u$ og $\cot(u + \pi) = \cot u$.
4. Vis at $\sin(u + \frac{\pi}{2}) = \cos u$. Hva er $\cos(u + \frac{\pi}{2})$?
5. Bruk at $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ til å finne $\sin \frac{\pi}{12}$ og $\cos \frac{\pi}{12}$.
6. Vis at $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$.
7. a) Vis at

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \sin^2 u.$$

- b) Vis at $\sin \frac{v}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}$ og $\cos \frac{v}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}}$ der fortegnene avhenger av hvilken kvadrant v ligger i.
 - c) Finn $\sin \frac{\pi}{8}$ og $\cos \frac{\pi}{8}$.
8. Vis at

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

og finn en tilsvarende formel for $\cot(u + v)$.

9. a) Vis at

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u+v) + \cos(u-v))$$

og at

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v))$$

for alle u, v .

b) Bruk formelene i a) til å vise at for alle x, y er

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

og

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

c) Vis at for alle u, v er

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u+v) + \sin(u-v))$$

og bruk denne formelen til å vise at

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

for alle x, y .

5 Faseform

Vi skal se på en omskriving av trigonometriske uttrykk som ofte er nyttig. Siden vi heretter hovedsaklig skal tenke på sinus og cosinus som funksjoner og ikke som geometriske verktøy, bytter jeg navn på variabelen fra v til x .

Vi starter med funksjonen

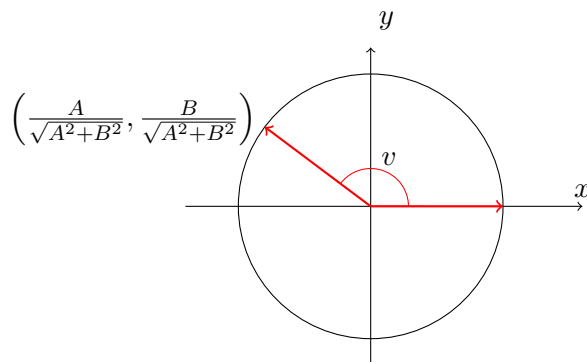
$$f(x) = A \sin cx + B \cos cx$$

der A, B, c er konstanter, og skriver den om som

$$f(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin cx + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos cx \right).$$

Punktet $(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}})$ ligger på enhetssirkelen, og derfor finnes det en vinkel v slik at $\cos v = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ og $\sin v = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (se figur 13). Ifølge formel (3) for sinus til en sum, har vi dermed

$$f(x) = \sqrt{A^2 + B^2}(\cos v \sin cx + \sin v \cos cx) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(cx + v).$$



Figur 13: Vinkelen v i faseformen

Vi kaller dette *faseformen* til funksjonen f . Denne formen er spesielt nyttig når man skal beskrive periodiske fenomener, f.eks. bølgebevegelser eller alt som avhenger av årstider.

Eksempel 1: Vi skal skrive

$$f(x) = \sqrt{3} \sin 4x - \cos 4x$$

på faseform. Vi har $A = \sqrt{3}$, $B = -1$, så $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$, og følgelig er

$$f(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} \cos 4x \right).$$

En vinkel v som har $\cos v = \frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\sin v = -\frac{1}{2}$, er $v = \frac{11}{6}\pi$, og dermed har vi

$$f(x) = 2 \sin \left(4x + \frac{11}{6}\pi \right). \quad (7)$$

Vi kunne like godt ha brukt $v = -\frac{\pi}{6}$ og fått

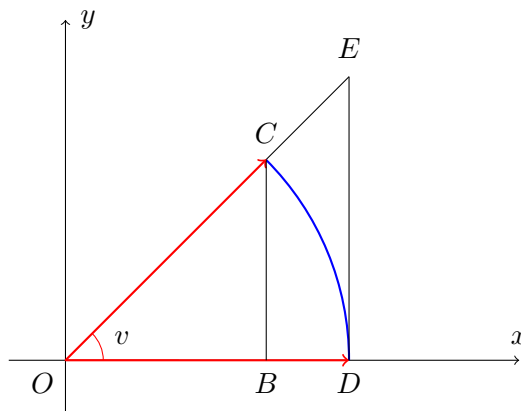
$$f(x) = 2 \sin \left(4x - \frac{\pi}{6} \right). \quad (8)$$

Oppgaver til seksjon 5

1. Skriv $f(x) = 5 \sin 2x + 5 \cos 2x$ på faseform. Bruk en lommeregner eller et dataprogram til å tegne grafen.
2. Skriv $f(x) = \sin 5x - \sqrt{3} \cos 5x$ på faseform. Bruk en lommeregner eller dataprogram til å tegne grafen.
3. Forklar at de to uttrykkene (7) og (8) er like.
4. Vis at $A \sin cx + B \cos cx = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(cx + v)$ for en passende vinkel v . Forklar hvordan man finner v i dette tilfellet og skriv $f(x) = 2 \sin 5x - 2\sqrt{3} \cos 5x$ på formen $f(x) = R \cos(5x + v)$, der R og v er konstanter.

6 Noen nyttige ulikheter

I denne seksjonen skal vi se på noen nyttige ulikheter som vi trenger for finne de deriverte til trigonometriske funksjoner.



Figur 14: To geometriske ulikheter

Utgangspunktet er figur 14 der vi ser at

areal til trekant $OBC \leq$ areal til sirkelsektor $ODC \leq$ areal til trekant ODE .

Hvis radien til buen er 1 (dvs. $|OD| = |OC| = 1$), ser vi at

$$\text{areal til trekant } OBC = \frac{1}{2} \sin v \cos v$$

siden høyden i trekanten er $\sin v$ og grunnlinjen er $\cos v$. Videre er (husk formel (1))

$$\text{areal til sirkelsektor } ODC = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot v = \frac{1}{2}v$$

siden radien er 1. Til slutt er

$$\text{areal til trekant } ODE = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan v = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin v}{\cos v}$$

siden grunnlinjen i trekanten er 1 og høyden er $\tan v$. Ulikheten ovenfor blir dermed til

$$\frac{1}{2} \sin v \cos v \leq \frac{1}{2}v \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin v}{\cos v}$$

Ganger vi hele uttrykket med $\frac{2}{\sin v}$ (vi antar at vi er i første kvadrant der $\sin v$ er positiv), får vi

$$\cos v \leq \frac{v}{\sin v} \leq \frac{1}{\cos v}.$$

Snur vi alle uttrykkene på hodet (og bytter rekkefølgen!), betyr dette at

$$\cos v \leq \frac{\sin v}{v} \leq \frac{1}{\cos v}.$$

Når v nærmer seg 0, vil $\cos v$ gå mot 1, og det samme vil $\frac{1}{\cos v}$. Siden $\frac{\sin v}{v}$ ligger klemmt mellom disse to størrelsene, må også $\frac{\sin v}{v}$ gå mot 1. Foreløpig har vi (stiltiende) antatt at v er positiv, men siden $\frac{\sin(-v)}{(-v)} = \frac{\sin v}{v}$, gjelder det samme for negative v . Vi har dermed vist at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (9)$$

(jeg har byttet variabelnavn fra v til x siden dette vil være mer naturlig når vi bruker formelen). Vi tar med oss to andre ulikheter som følger fra (9). Den første er:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

For å se at dette er riktig, ganger vi over og under brøkstreken med $1 + \cos x$ og bruker at $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

der det siste steget bruker at $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ og $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2$. Den tredje ulikheten er en umiddelbar konsekvens av den andre. Den sier at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \quad (11)$$

Grunnen er at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Som allerede nevnt, skal vi i neste seksjon se hvordan vi kan bruke ulikhetene ovenfor til å finne de deriverte til våre trigonometriske funksjoner.

Oppgaver til seksjon 6

1. Finn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.
2. Finn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.
3. Finn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.
4. Finn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cot 4x}$.
5. Finn $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$.

7 Derivasjon av trigonometriske funksjoner

For å finne de deriverte til sinus og cosinus tar vi utgangspunkt i definisjonen av den deriverte

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Bruker vi denne definisjonen på $f(x) = \sin x$ og kombinerer den med formel (3) for sinus til en sum, får vi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}.$$

Vi omgrupperer litt og får:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right).$$

Ifølge formel (11) i forrige seksjon går det første leddet mot $\sin x \cdot 0 = 0$, og ifølge formel (9) går det andre leddet mot $\cos x \cdot 1 = \cos x$, og dermed ender vi opp med $f'(x) = \cos x$. Vi har altså vist at

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Vi kan argumentere tilsvarende for cosinus ved å bruke formel (4) istedenfor (3). Hvis vi setter $g(x) = \cos x$, har vi

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x}.$$

Igjen omgrupperer vi og får

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} - \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right).$$

Som i stad går det første leddet mot 0 ifølge formel (11), mens det andre leddet går mot $-\sin x$ ved formel (9), og dermed har vi $g'(x) = -\sin x$. Vi har altså vist at

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

For å derivere mer kompliserte funksjoner kan vi kombinere reglene ovenfor med de generelle derivasjonsreglene på vanlig måte.

Eksempel 2: Vi kan bruke produktregelen til å derivere $f(x) = x^2 \sin x$ på denne måten:

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Vi kan også derivere $g(x) = e^{-x} \cos x^2$ ved å kombinere produktregelen og kjerneregelen:

$$g'(x) = -e^{-x} \cos x^2 + e^{-x}(-\sin x^2 \cdot 2x) = -e^{-x}(\cos x^2 + 2x \sin x^2) \quad \square$$

La oss bruke brøkregelen til å finne de deriverte til tangens og cotangens:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

og

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Det er også en annen form for disse uttrykkene. Fra regningene ovenfor ser vi at

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

og

$$(\cot x)' = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = -(1 + \cot^2 x).$$

Disse formlene er av og til nyttige siden de uttrykker den deriverte ved hjelp av den opprinnelige funksjonen.

La oss til slutt samle derivasjonsreglene for trigonometriske funksjoner på et sted:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).$$

Oppgaver til seksjon 7

1. Finn den deriverte til funksjonene

a) $f(x) = x \sin x$.

b) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$.

c) $f(x) = 5 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

d) $f(x) = \ln(\sin x)$.

e) $f(x) = x^3 \tan x$.

f) $f(x) = x \tan(e^x)$.

g) $f(x) = \frac{\sin x^3}{x^2}$.

h) $f(x) = \frac{\cot^2 x}{x^4}$.

2. I noen bøker brukes også funksjonene *sekans* og *cosekans*. De er definert ved

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ og } \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

- a) Finn de deriverte $(\sec x)'$ og $(\csc x)'$.
- b) Vis at den deriverte til $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1 + \sin x) - \ln(1 - \sin x))$ er lik $\sec x$.
- c) Finn en funksjon g slik at $g'(x) = \csc x$ (her må du gjette litt basert på regningene i b)).