UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1050 — Matematikk for anvendelser 1
Eksamensdag:	Onsdag 29. november, 2023
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator og ett A4-ark med valgfri håndskrevet eller

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamensettet består av 4 oppgaver, med tilsammen 10 deloppgaver som alle gir maksimum 10 poeng ved sensuren. Maksimal total poengsum er 100. Dersom det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatene derfra i senere punkter om du skulle ønske det. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Ubegrunnede svar vil få null poeng under sensuren.

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

Beregn det ubestemte integralet $\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$. Avgjør deretter om det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$$

er konvergent.

Oppgave 2 (vekt 20 poeng)

La funksjonen f være definert ved

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Beregn Taylor-polynomet p til f av grad 2 i $x = 0$. Bruk det til å anslå verdien av $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$.

b) Begrunn at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ konverger mot $f(x)$ for alle $x \in (-1, 1)$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 (vekt 30 poeng)

Betrakt funksjonen f som er definert på $\mathbb{R}^2$ ved

$$f(x,y) = x^2y + x^2 + y^2 - 2y.$$

a) Begrunn at de kritiske punktene til f er $(0,1)$, $(2,-1)$ og $(-2,-1)$.

b) Bestem typen til de kritiske punktene til f (med andre ord, avgjør hvilke som gir et sadelpunkt, et lokalt minimumspunkt eller et lokalt maksimumspunkt).

c) Beregn gjennomsnittsverdien $\overline{f}$ av f over rektanglet $R = [-1,1] \times [0,2]$.

Oppgave 4 (vekt 40 poeng)

La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet i xy-planet som er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (2xy - 2y, x^2 - 2x)$$

for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Begrunn at $\mathbf{F}$ er konservativt, og angi et potensial for $\mathbf{F}$.

b) La C være kurven i xy-planet som er angitt i polarkoordinatene r og θ ved

$$r = 1 - 2\cos(2\theta)\,, \quad \text{der } \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Beregn kurveintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der kurven C er orientert oppover.

c) La D være området i xy-planet som kan beskrives i polarkoordinatene r og θ ved

$$0 \leq r \leq 1 - 2\cos(2\theta)\,, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Regn ut arealet A til området D.

d) La $\mathbf{G}$ være vektorfeltet i xy-planet som er gitt ved

$$\mathbf{G}(x,y) = (-y, x)\,,$$

og la C' være den lukkede kurven i xy-planet som er randkurven til området D ovenfor. Beregn kurveintegralet $\oint_{C'} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$, der C' er orientert mot klokka.

Lykke til!