# FORMELSAMLING FOR MAT 1050

## Derivasjonsregler

**Spesielle:** $(x^n)' = nx^{n-1}$
$(a^x)' = a^x \ln a$, spesielt $(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
**Generelle:** $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

## Spesielle funksjoner

**Eksponential**: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$
**Logaritmer**: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\quad \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\quad \ln(x^a) = a \ln x$
**Trigonometriske**: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
**Eksakte verdier**:

| $v$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin v$ | $0$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ |
| $\cos v$ | $1$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | $0$ |
| $\tan v$ | $0$ | $\sqrt{3}/3$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $-$ |

## Integrasjonsregler

**Spesielle:** $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ når $n \neq -1$, $\quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$
$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, spesielt $\int e^x \, dx = e^x + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, $\quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$
**Generelle:** $\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$
$\int f'(g(x))g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$

## Komplekse tall

**Skrivemåter**: $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
**Komplekskonjugert**: $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$
$abc$**-formelen:** $x^2 + bx + c = 0$ gir $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
**Eksponentialfunksjonen**: $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$

## Funksjoner av flere variable

**Gradient**: $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$
**Kjerneregel**: For $h(t) = f(\mathbf{x}(t))$,

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t))\ x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t))\ x_n'(t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)$$

**Annenderiverttest**: Anta at $(a, b)$ er et stajonært punkt og la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$, $D = AC - B^2$. Da gjelder

i) Hvis $D < 0$, er $(a, b)$ et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er $(a, b)$ et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er $(a, b)$ et lokalt maksimum.

**Lagranges multiplikatormetode**: $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y),\ g(x, y) = c$.

## Numeriske formler

**Taylors formel**: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
**Trapesmetoden**: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{2}\left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right)$
**Simpsons metode**: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots\right.$
$\left.\cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)\right)$
**Eulers metode**: $y(t_{n+1}) = y(t_n) + g(t_n, y(t_n))\Delta t$

## Parametriserte kurver og linjeintegraler

**Tangent:** $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$
**Buelengde:** $s = L(a, b) = \int_a^b 1\,ds = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\ dt$
**Linjeintegral av funksjon:** $\int_C f\ ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\ dt$
**Linjeintegral av vektorfelt:** $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C\ ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$
**Integral av gradient:** $\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a))$
**Sirkulasjon av plant vektorfelt** $\mathbf{F} = (p, q)$: $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$
**Nødvendig betingelse for konservativt felt:** $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = 0$.

## Multiple integraler

**Polarkoordinater:** $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,
$\iint_{D(x,y)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$
**Areal og tyngdepunkt:** $A = \iint_D 1\,dx\,dy$
$\overline{x}A = \iint_D x\,dx\,dy \qquad \overline{y}A = \iint_D y\,dx\,dy$
**Greens teorem:** $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{C}} P\ dx + Q\ dy$

## Dynamiske systemer

**System:** $x'(t) = ax + by + e$, $y'(t) = cx + dy + f$
**Diskriminant:** $\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$
**Egenverdier**: $\lambda = \frac{a+d\pm\sqrt{\mathcal{D}}}{2} = \frac{a+d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$
**Type likevektspunkt**:
(I) For reelle egenverdier $\lambda_1, \lambda_1$:

(ii) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: frastøtende likevektspunkt

(ii) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: tiltrekkende likevektspunkt

(iii) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$: bifurkasjon, tiltrekning langs én linje

(II) For komplekse egenverdier $\lambda = \alpha \pm \beta i$:

(i) $\alpha > 0$: utoverrettet spiral

(ii) $\alpha < 0$: innoverrettet spiral

(iii) $\alpha = 0$: bifurkasjon med periodiske, stabile baner utenfor likevektspunktet

**Generell løsning** av det homogene systemet $x'(t) = ax+by$, $y'(t) = cx+dy$:

$$x(t) = Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t}$$
$$y(t) = \frac{\lambda_1 - a}{b}Ce^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 - a}{b}De^{\lambda_2 t}$$

**Generell løsning** av det inhomogene systemet $x'(t) = ax + by + e$, $y'(t) = cx + dy + f$:

$$x(t) = x_h(t) + x_0$$
$$y(t) = y_h(t) + y_0,$$

der $x_h, y_h$ er løsningene av det homogene systemet, og $(x_0, y_0)$ er likevektspunktet.