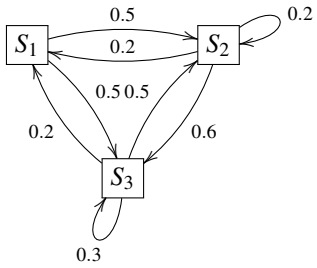
Løsningsforslag, eksamen i MAT 1060, mandag 27. mai 2019

Oppgave 1. *Et dynamisk system kan illustreres med følgende boks-diagram*



Skriv opp den tilhørende overgangsmatrisen til diagrammet og vis at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

er en likevektstilstand for modellen.

Løsning: *Overgangsmatrisen er gitt ved*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

og vi har

$$M \begin{pmatrix} 26 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 26 + 0.2 \cdot 60 + 0.2 \cdot 70 \\ 0.5 \cdot 26 + 0.2 \cdot 60 + 0.5 \cdot 70 \\ 0.5 \cdot 26 + 0.6 \cdot 60 + 0.3 \cdot 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 12 + 14 \\ 13 + 12 + 35 \\ 13 + 36 + 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

som viser at den oppgitte vektoren er en likevektstilstand.

Oppgave 2. *La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til T og finn egenverdiene.

b) Finn de tilhørende egenvektorene og vis at egenvektorene til A danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

c) La $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{w}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer for A.

d) Regn ut $T(\mathbf{w})$ og $T(T(\mathbf{w}))$. Finn et uttrykk for $T^n(\mathbf{w})$ for en vilkårlig n. Vi skriver $T^n(x)$ for sammensetningen $T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n ganger).

Løsning:

a) Det karakteristiske polynomet er gitt ved

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 0 \cdot 2 = -(1-\lambda)(1+\lambda)$$

Det gir egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -1$. Dette kunne vi ha lest rett ut av matrisen siden den er triangulær og derfor har egenverdiene stående på diagonalen.

b) For egenverdien $\lambda_1 = 1$ finner vi egenvektoren ved å løse

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dvs. $a = b$. En basis for dette egenrommet kan være $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. For den andre egenverdien $\lambda_2 = -1$ har vi

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2b-a \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

som gir

$$\begin{aligned} a &= -a \\ 2a - b &= -b \end{aligned}$$

dvs. $a = 0$ og b kan velges fritt. En basis for dette egenrommet er gitt ved $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Siden vi har to forskjellige egenverdier for en 2×2-matrise vil de to egenrommene til sammen utspenne hele $\mathbb{R}^2$.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gir $a = 1$ og $b = -1$. Det betyr at

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Vi har

$$T^n(\mathbf{w}) = 1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det betyr at dersom n er et partall, så er

$$T^n(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{w}$$

mens vi for n odde får

$$T^n(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3. *La $\mathscr{P}_2$ være vektorrommet av polynomer av grad mindre enn eller lik 2 utstyrt med indreproduktet*

$$\langle f(x), g(x)\rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

a) Vis at polynomene $\frac{1}{\sqrt{2}}x$ og x^2-1 begge har lengde 1 og at de står normalt på hverandre.

b) Finn en ortonormal basis for polynomer i $\mathscr{P}_2$ relativt til dette indreproduktet.

Løsning:

a) Vi har

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}x, \frac{1}{\sqrt{2}}x\rangle = (\frac{-1}{\sqrt{2}})^2 + 0^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

$$\langle x^2-1, x^2-1\rangle = 0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1$$

og

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}x, x^2-1\rangle = (\frac{-1}{\sqrt{2}})\cdot 0 + 0\cdot(-1) + (\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot 0 = 0$$

b) Vi ser på et vilkårlig polynom ax^2+bx+c og tvinger det til å stå normalt på de to polynomene i a), samtidig som at det skal ha lengde 1. Det betyr

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}x, ax^2+bx+c\rangle = (\frac{-1}{\sqrt{2}})\cdot(a-b+c) + 0 + (\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot(a+b+c) = \frac{2b}{\sqrt{2}} = 0$$

som gir $b=0$,

$$\langle x^2-1, ax^2+c\rangle = 0 - c + 0 = -c = 0$$

som gir $c=0$, og endelig

$$\langle ax^2, ax^2\rangle = a^2 + 0 + a^2 = 2a^2 = 1$$

som gir $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mengden

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}x, x^2-1, \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\}$$

danner en ortonormal basis i dette tilfellet.

Oppgave 4. *Vi skal sette sammen to stive bevegelser. Den ene, T_1, er en rotasjon mot klokka med en vinkel $\frac{\pi}{2}$ om punktet $(1,1)$, og den andre, T_2, er refleksjon om linja $y=-x$.*

a) Skriv opp formler på formen $T_i(\mathbf{v}) = A_i\mathbf{v} + \mathbf{b}_i$ for de to avbildningene.

b) Regn ut komposisjonene $T_1 \circ T_2$ og $T_2 \circ T_1$. Finn eventuelle fikspunkter.

c) Hva slags avbildning er $T_1 \circ T_2 + T_2 \circ T_1$?

Løsning:

a)

$$T_1(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v}$$

b)

$$T_1(T_2(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2(T_1(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ingen av disse har noen fikspunkter siden

$$T_1(T_2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ikke har noen løsning, og det har heller ikke

$$T_2(T_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c) Hvis vi legger sammen de to avbildningene i b) får vi

$$T_1(T_2(\mathbf{v})) + T_2(T_1(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Det betyr at denne sammensettingen gir oss en konstantavbildning.