MAT1060 V22

Løsningsforslag til ordinær eksamen

Oppgave 1 (a) Bestem egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Løsning: Vi har

$$\operatorname{tr}(A) = -1, \quad \det(A) = -2,$$

så det karakteristiske polynomet til A er

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

Egenverdiene til A er derfor 1 og -2.

(b) Finn en basis for $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer for A.

Løsning: Vi har

$$A - I = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

så $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A svarende til egenverdien 1. Videre er

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

så $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A svarende til egenverdien -2. Siden de tilhørende egenverdiene er forskjellige, må $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være lineært uavhengige og utgjør derfor en basis for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 2 Vi betrakter matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Nullrommet til A består av alle vektorer $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^3$ slik at $A\mathbf{x} = 0$. Bestem dimensjonen til nullrommet.

Løsning: Setter vi $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, er likningen $A\mathbf{x} = 0$ ekvivalent med systemet av likninger

$$x_3 = -\frac{x_1}{3}, \quad x_2 = -\frac{2x_1}{3}, \quad x_2 = 2x_3.$$

Siden den siste likningen følger av de to første, danner vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en basis for nullrommet, som derfor har dimensjon 1.

(b) Bestem rangen til A.

Løsning: La $\mathcal{N}(A)$ være nullrommet til A. Som forklart i kompendiet er

$$\mathrm{rg}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = 3,$$

hvilket gir

$$\mathrm{rg}(A) = 3 - 1 = 2.$$

Oppgave 3 La S_1 være speilingen (=refleksjonen) av $\mathbb{R}^2$ i linja $x = y$, og la S_2 være speilingen av $\mathbb{R}^2$ i linja $y = -3$. Her er x, y de vanlige koordinatene på $\mathbb{R}^2$.

(a) Uttrykk S_1 og S_2 på formen

$$S_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x} + \mathbf{v}_1, \quad S_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x} + \mathbf{v}_2,$$

hvor A_1 og A_2 er ortogonale 2×2 matriser, og $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er vektorer i $\mathbb{R}^2$.

Løsning: La L_1 betegne linja $x = y$ og sett

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da er vektoren $\mathbf{v}_1$ parallell med linja L_1, og A_1 er en speilingsmatrise som oppfyller $A_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$. Siden origo ligger på L_1, er speilingen S_1 gitt ved

$$S_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

La L_2 betegne linja $y = -3$ og sett

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Da er vektoren $\mathbf{v}_2$ parallell med linja L_2, og A_2 er en speilingsmatrise som oppfyller $A_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$. Siden punktet $\mathbf{p}_2$ ligger på L_2, er

$$S_2(\mathbf{x}) = A_2(\mathbf{x} - \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_2 = A_2\mathbf{x} + (I - A_2)\mathbf{p}_2.$$

Vi regner ut

$$(I - A_2)\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Det gir

$$S_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestem fikspunktmengden til sammensetningen $T = S_1 \circ S_2$. Hva slags isometri er T ?

Løsning: T er en orienteringsbevarende isometri forskjellig fra identiteten og holder snittpunktet $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ mellom linjene L_1 og L_2 i ro. Fra klassifikasjonen av isometrier i planet følger det at T må være en rotasjon om $\mathbf{q}$. Rotasjonsvinkelen θ er opp til fortegn to ganger vinkelen mellom linjene, altså $\theta = \pm\pi/2$. For å bestemme fortegnet regner vi ut

$$T(\mathbf{x}) = A_1(A_2\mathbf{x} + \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Siden matrisen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ representerer rotasjonen om origo med vinkel $\pi/2$, er også $\theta = \pi/2$.

Oppgave 4 Vi betrakter matrisen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis at A er en ortogonal matrise.

Løsning: Per definisjon er A ortogonal hvis og bare hvis $A^t \cdot A = I$. Vi regner ut

$$A^t \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Altså er A ortogonal.

(b) Finn alle vektorer $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Hva slags isometri i $\mathbb{R}^3$ representerer matrisen A ?

Løsning: Vi har

$$3(A - I) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Siden den første raden i denne matrisen er (-2) ganger den siste raden, er likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ekvivalent med likningsystemet

$$\begin{aligned} -2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

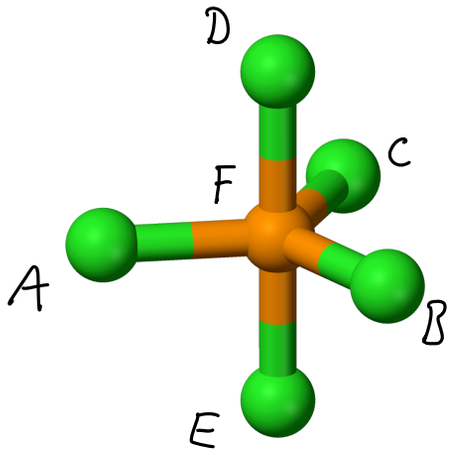
Ved å legge sammen de to likningene finner vi at $x_2 = 0$, så systemet er ekvivalent med

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 2x_1.$$

Løsningsmengden er altså alle punkter på formen $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}$ hvor t er et reelt tall.

La nå $R(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Siden fikspunktmengden til R er ei linje, er R en rotasjon om denne linja.

Oppgave 5



(a) Beskriv gruppen av orienteringsbevarende symmetrier til fosforpentaklorid PCl_5.

Løsning: La A, B, C, D, E, F være atomene i molekylet, hvor F er fosforatomet og atomene A, B, C, F ligger i det samme plan.

La G være gruppen av orienteringsbevarende symmetrier av molekylet. Hvert element av G vil enten holde atomene D, E i ro eller bytte dem om. Et element av den første typen er en rotasjon om linja gjennom D, E, F og med vinkel $2k\pi/3$, hvor $k = 0, 1, 2$. Et element av den andre typen er en rotasjon om linja gjennom F og et av atomene A, B, C og med vinkel π.

Hvert element av G sender mengden $\{A, B, C\}$ på seg selv. Dette gir en gruppeisomorfi

$$G \xrightarrow{\approx} S_3$$

fra G til den symmetriske gruppa S_3 (som er isomorf med diedergruppa D_3).

(b) Har dette molekylet noen orienteringsreverserende symmetri? Gi i så fall et eksempel på en slik symmetri.

Løsning: Et eksempel på en slik symmetri er speilingen i planet gjennom atomene A, B, C, F.