UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1060 — Matematikk for anvendelser 2
Eksamensdag:	Onsdag 14. juni 2023
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator og ett A4-ark med valgfri håndskrevet eller trykt tekst på begge sider.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

OPPGAVE 1 La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdier og tilhørende egenvektorer.

b) Vis at eller begrunn hvorfor egenvektorer for ulike egenverdier i oppgave a) danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

c) Regn ut den inverse A^{-1} til A. Finn også egenverdiene til A^{-1}.

OPPGAVE 2

a) To vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en ortonormal mengde, dvs. de to vektorene står normalt på hverandre og har lengde 1.

b) Finn en tredje vektor $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

OPPGAVE 3 En isometri i planet er gitt ved

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Finn fikspunktmengden til T og avgjør hva slags isometri T er.

(Fortsettes på side 2.)

b) Finn et uttrykk for T^2. Hva slags isometri er dette?

OPPGAVE 4 Et indreprodukt på vektorrommet av 2×2-matriser er gitt ved

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$

a) La $A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ og $A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ være to 2×2-matriser. Vis at $\{A_1, A_2\}$ danner en ortonormal mengde under dette indreproduktet, dvs. $\langle A_1, A_1\rangle = \langle A_2, A_2\rangle = 1$ og $\langle A_1, A_2\rangle = 0$.

b) Vi kan utvide mengden $\{A_1, A_2\}$ til en ortonormal basis $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ for vektorrommet av 2×2-matriser, ved å sette

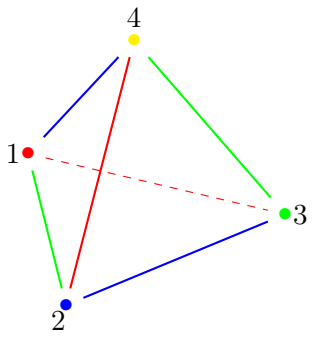
$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

(Du trenger ikke å sjekke dette). Denne oppgaven går ut på å skrive matrisen $M = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av A_1, A_2, A_3 og A_4. Vi har

$$M = t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3 + t_4A_4$$

Du får oppgitt at $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ og $t_3 = 1$, dvs. $M = A_1 + A_3 + t_4A_4$. Finn t_4.

OPPGAVE 5 Figuren viser et tetraeder; et regulært legeme satt sammen av 4 likesidete trekanter. Vi nummererer hjørnene fra 1 til 4. Kantene navngis ved 12, 13, 24, osv. mens sideflatene omtales som 123, 124, 134, og 234. Tetraederet har i alt 7 rotasjonsakser og 6 refleksjonsplan. Beskriv disse ved hvor på figuren de er lokalisert og ved deres orden.



(Fortsettes på side 3.)

Noen nyttige begreper og formler:

Karakteristisk polynom: $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$

Egenvektorer/egenverdier: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\chi_M(\lambda) = 0$

Likevektstilstand: Egenvektor med egenverdi 1

Invers til en 2×2-matrise $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Rotasjon med vinkel θ om $(0,0) \in \mathbb{R}^2$: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Rotasjon med vinkel θ om et punkt P: $T(\mathbf{v}) = R_\theta(\mathbf{v} - P) + P$

Refleksjon om linje $ax + by = 0$: $T(\mathbf{v}) = \left(I - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}\right)\mathbf{v}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

Fikspunkt for en avbildning: $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$

Dekomposisjon i ortonormal basis: $\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \cdots + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$