Oppgave 1. La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdier og tilhørende egenvektorer.

Løsning:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 9 \\ -3 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 8$$

som gir egenverdier $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -4$. Egenvektorene blir

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = u\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Vis at eller begrunn hvorfor egenvektorer for ulike egenverdier i oppgave a) danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Løsning: Egenverdier for ulike egenverdier er alltid lineært uavhengige, og siden det er to av dem danner de en basis. Alternativt kan man vise at

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

hvor sølene er egenvektorene og determinant ulik 0 betyr at søylerommet er lik hele $\mathbb{R}^2$.

c) Regn ut den inverse A^{-1} til A. Finn også egenverdiene til A^{-1}.

Løsning: Vi vet allerede at determinanten til A er -8. Det gir for den inverse

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Egenverdiene til den inverse er de inverse av egenverdiene, dvs. $\mu_1 = \frac{1}{2}$ og $\mu_2 = -\frac{1}{4}$.

Oppgave 2. a) To vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en ortonormal mengde, dvs. de to vektorene står normalt på hverandre og har lengde 1.

Løsning: Vi har $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ og $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 1$

b) Finn en tredje vektor $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

Løsning: Vi kan finne $\mathbf{v}_3$ ved å ta kryssproduktet av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3^2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3. En isometri i planet er gitt ved

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Finn fikspunktmengden til T og avgjør hva slags isometri T er.

Løsning: $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ eller

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

som gir

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 5 &= 5x \\ -3x - 4y + 15 &= 5y \end{aligned}$$

eller $x + 3y = 5$, som betyr at T er en refleksjon om linja $x + 3y = 5$.

b) Finn et uttrykk for T^2. Hva slags isometri er dette?

Løsning: Siden T er en refleksjon vil T^2 nødvendigvis være identiteten.

Oppgave 4. Et indreprodukt på vektorrommet av 2×2-matriser er gitt ved

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$

a) La $A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ og $A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ være to 2×2-matriser. Vis at $\{A_1, A_2\}$ danner en ortonormal mengde under dette indreproduktet, dvs. $\langle A_1, A_1 \rangle = \langle A_2, A_2 \rangle = 1$ og $\langle A_1, A_2 \rangle = 0$.

Løsning: Vi har

$$\langle A_1, A_1\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$

$$\langle A_2, A_2\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$

$$\langle A_1, A_2\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0$$

b) Vi kan utvide mengden $\{A_1, A_2\}$ til en ortonormal basis $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ for vektorrommet av 2×2-matriser, ved å sette

$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

(Du trenger ikke å sjekke dette). Denne oppgaven går ut på å skrive matrisen $M = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av A_1, A_2, A_3 og A_4. Vi har

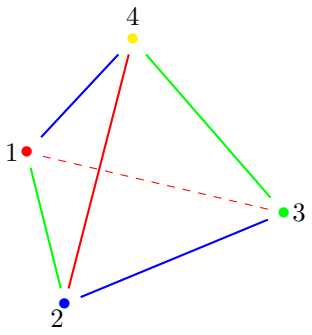
$$M = t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3 + t_4A_4$$

Du får oppgitt at $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ og $t_3 = 1$, dvs. $M = A_1 + A_3 + t_4A_4$. Finn t_4.

Løsning: Siden basisen er ortonormal har vi

$$\begin{aligned} t_4 &= \langle M, A_4\rangle \\ &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 4 \end{aligned}$$

Oppgave 5. Figuren viser et tetraeder; et regulært legeme satt sammen av 4 likesidete trekanter. Vi nummererer hjørnene fra 1 til 4. Kantene navngis ved 12, 13, 24, osv. mens sideflatene omtales som 123, 124, 134, og 234. Tetraederet har i alt 7 rotasjonsakser og 6 refleksjonsplan. Beskriv disse ved hvor på figuren de er lokalisert og ved deres orden.



Løsning: Rotasjonsaksene er gitt ved: (orden i parantes)

- Fra hvert hjørne og normalt på motstående sideflate, en for hvert av de 4 hjørnene (orden 3)
- Fra senter på 12 til senter på 34 (grønne linjer) (2)
- Fra senter på 14 til senter på 23 (blå linjer) (2)
- Fra senter på 13 til senter på 24 (røde linjer) (2)

Refleksjonsplanene er gitt ved (alle refleksjoner har orden 2)

- Gjennom 14 og midtpunktet på 23
- Gjennom 23 og midtpunktet på 14
- Gjennom 34 og midtpunktet på 12
- Gjennom 12 og midtpunktet på 34
- Gjennom 13 og midtpunktet på 24
- Gjennom 24 og midtpunktet på 13