Prøveeksamen, MAT 1060, våren 2023

Oppgave 1. La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdier og tilhørende egenvektorer.

b) Vis at eller begrunn hvorfor egenvektorer for ulike egenverdier i oppgave a) danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

c) Regn ut den inverse A^{-1} til A. Finn også egenverdiene til A^{-1}.

Oppgave 2. a) To vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en ortonormal mengde, dvs. de to vektorene står normalt på hverandre og har lengde 1.

b) Finn en tredje vektor $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 3. En isometri i planet er gitt ved

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn fikspunktmengden til T og avgjør hva slags isometri T er.

b) Finn et uttrykk for T^3. Hva slags isometri er dette?

Oppgave 4. Et indreprodukt på vektorrommet av 2×2-matriser er gitt ved

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$

a) La $B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ og $B_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ være tre 2×2-matriser. Vis at $\{B_1, B_2, B_3\}$ danner en ortonormal mengde under dette indreproduktet, dvs. $\langle B_1, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = \langle B_3, B_3 \rangle = 1$ og $\langle B_1, B_2 \rangle = \langle B_1, B_3 \rangle = \langle B_2, B_3 \rangle = 0$.

b) Vis at matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ikke kan skrives som en lineærkombinasjon av B_1, B_2 og B_3.

Oppgave 5. Figuren viser en rektangulær boks med kvadratisk grunnflate med sidelengde 2 og høyde 3. Hjørnene er nummerert som på figuren. Boksen har i alt 5 rotasjonsakser og 5 refleksjonsplan. Beskriv disse ved hvor på figuren de er lokalisert (enten ved x-, y- og z-koordinatene eller ved hjelp av hjørnenummer) og ved deres orden.

