Prøveeksamen, MAT 1060, våren 2023

Oppgave 1. La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ der A er 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det karakteristiske polynomet til A og finn egenverdier og tilhørende egenvektorer.

Løsning:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

som gir egenverdier $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 3$. Egenvektorene blir

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Vis at eller begrunn hvorfor egenvektorer for ulike egenverdier i oppgave a) danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Løsning: Egenverdier for ulike egenverdier er alltid lineært uavhengige, og siden det er to av dem danner de en basis. Alternativt kan man vise at

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

hvor søylene er egenvektorene og determinant ulik 0 betyr at søylerommet er lik hele $\mathbb{R}^2$.

c) Regn ut den inverse A^{-1} til A. Finn også egenverdiene til A^{-1}.

Løsning: Vi vet allerede at determinanten til A er 6. Det gir for den inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenverdiene til den inverse er de inverse av egenverdiene, dvs. $\mu_1 = \frac{1}{2}$ og $\mu_2 = \frac{1}{3}$.

Oppgave 2. a) To vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en ortonormal mengde, dvs. de to vektorene står normalt på hverandre og har lengde 1.

Løsning: Vi har $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ og $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 1$

b) Finn en tredje vektor $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

Løsning: Vi kan finne $\mathbf{v}_3$ ved å ta kryssproduktet av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3. En isometri i planet er gitt ved

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn fikspunktmengden til T og avgjør hva slags isometri T er.

Løsning: $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ eller

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

som gir

$$\begin{aligned} -3x - \sqrt{3}y &= -2 \\ \sqrt{3}x - 3y &= -2 \end{aligned}$$

Vi har

$$\begin{vmatrix} -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

som betyr at likningssystemet har en entydig løsning. Løsning av likningssystemet gir $\mathbf{v} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Ett fikspunkt betyr at T beskriver en rotasjon.

b) Finn et uttrykk for T^3. Hva slags isometri er dette?

Løsning: Hvis vi skriver $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$ får vi

$$T^3(\mathbf{v}) = A(A(A\mathbf{v}+\mathbf{b})+\mathbf{b})+\mathbf{b} = A^3\mathbf{v} + (A^2+A+I)\mathbf{b}$$

Vi har

$$A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som gir

$$A^2+A+I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og derfor er $T^3(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, dvs. $T^3 = Id$.

Oppgave 4. Et indreprodukt på vektorrommet av 2×2-matriser er gitt ved

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$

a) La $B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ og $B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ være tre 2×2-matriser. Vis at $\{B_1, B_2, B_3\}$ danner en ortonormal mengde under dette indreproduktet, dvs. $\langle B_1, B_1\rangle = \langle B_2, B_2\rangle = \langle B_3, B_3\rangle = 1$ og $\langle B_1, B_2\rangle = \langle B_1, B_3\rangle = \langle B_2, B_3\rangle = 0$.

Løsning: Vi har

$$\langle B_1, B_1\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle B_2, B_2\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle B_3, B_3\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle B_1, B_2\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle B_1, B_3\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle B_2, B_3\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

b) Vis at matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ikke kan skrives som en lineærkombinasjon av B_1, B_2 og B_3.

Løsning: Vi har

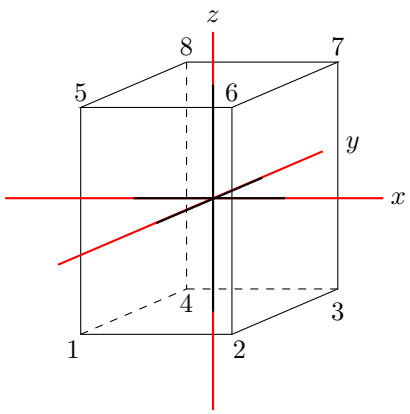
$$\langle B_1, C\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle B_2, C\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle B_3, C\rangle = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

som betyr at C står normalt på rommet utspent av B_1, B_2 og B_3. Matrisen C kan derfor ikke være en lineær kombinasjon av B_1, B_2 og B_3.

Oppgave 5. Figuren viser en rektangulær boks med kvadratisk grunnflate med sidelengde 2 og høyde 3. Hjørnene er nummerert som på figuren. Boksen har i alt 5 rotasjonsakser og 5 refleksjonsplan. Beskriv disse ved hvor på figuren de er lokalisert (enten ved x-, y- og z-koordinatene eller ved hjelp av hjørnenummer) og ved deres orden.



Løsning: Rotasjonsaksene er gitt ved: (orden i parantes)

- x-aksen (orden 2)
- y-aksen (2)
- z-aksen (4)
- Mellom midtpunktene på 15 og 37 (2)
- Mellom midtpunktene på 26 og 48 (2)

Refleksjonsplanene er gitt ved (alle refleksjoner har orden 2)

- x, y-planet
- x, z-planet
- y, z-planet
- 1375-planet
- 2684-planet