UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1060 — Matematikk for anvendelser 2
Eksamensdag:	30. mai 2024
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst. Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 20%)

(a) Regn ut det karakteristiske polynomet til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vis at -1 og 3 er egenverdier til A.

(b) For hvilket tall b er 3×3-matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & b & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ikke invertibel?

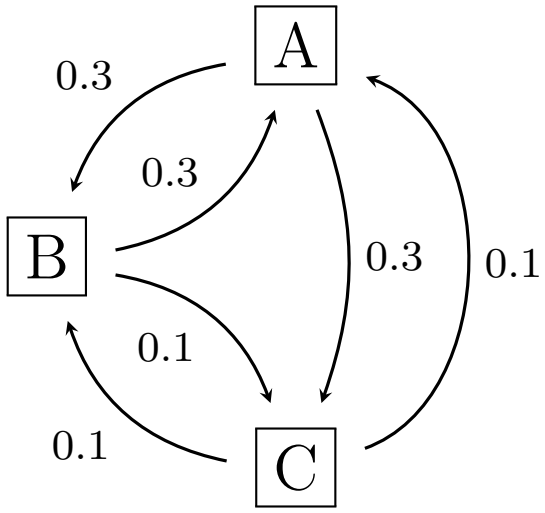
Oppgave 2 (vekt 10%)

Figur 1 (på neste side) inneholder et boksdiagram som beskriver migrasjonsmønstret mellom de tre byene Aoslo, Boslo, og Coslo fra et år til det neste. For eksempel angir pilene ut fra $\boxed{\text{B}}$ at

- 30% av innbyggerne fra Boslo flytter til Aoslo,
- 10% av innbyggerne fra Boslo flytter til Coslo,
- og de resterende 60% blir boende i Boslo.

Finn overgangsmatrisen M som svarer til boksdiagrammet i Figur 1. Forklar hvorfor M er *stokastisk*. Vil det dynamiske systemet ha en likevektstilstand? (Du trenger ikke regne ut eventuelle likevektstilstander.)

(Fortsettes på side 2.)



Figur 1: Migrasjon mellom byene Aoslo, Boslo og Coslo.

Oppgave 3 (vekt 10%)

Finn en basis for nullrommet til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hva er rangen til A?

Oppgave 4 (vekt 20%)

(a) En isometri m av planet er gitt ved $m(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ for

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Regn ut fikspunktmengden til m. Hva slags isometri av planet er m?

(b) Hva betyr *ordenen* til en isometri m av planet? La B være en ortogonal 2×2-matrise som oppfyller $B^2 \neq I$ og $B^3 = I$. Hva slags isometri av planet er $m(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$? Det er kun to forskjellige matriser som oppfyller dette. Finn dem.

Oppgave 5 (vekt 20%)

(a) Vis at $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er en ortonormal mengde, der

$$\mathbf{u} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 3.)

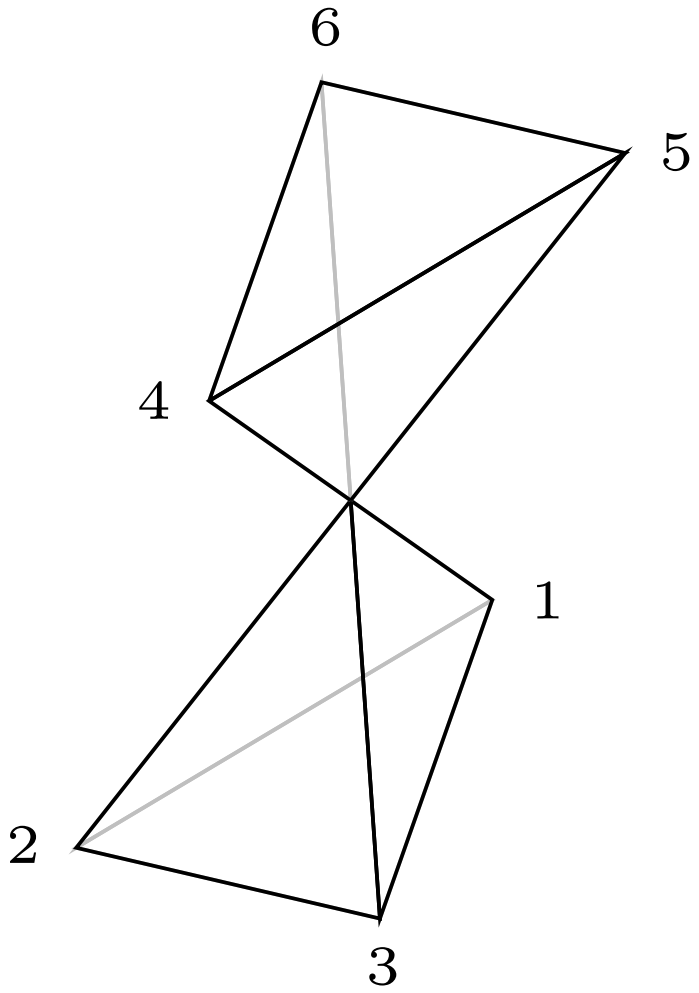
(b) Finn tall a, b, c slik at

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 2 & a \\ 10 & 10 & b \\ -10 & 11 & c \end{pmatrix}$$

er en ortogonal matrise eller forklar hvorfor det ikke er mulig.

Oppgave 6 (vekt 20%)

(a) Et regulært tetraeder er en pyramide i $\mathbb{R}^3$ som består av fire likesidede trekanter. Det romlige objektet i Figur 2 består av to regulære tetraeder. Beskriv symmetrigruppen til objektet. *Hint.* Det er 12 symmetrier.



Figur 2: Vi har nummerert hjørnene i "gulvet" til det nederste tetraederet med tallene $1, 2, 3$ og "taket" av det øverste tetraederet med tallene $4, 5, 6$.

(b) Hva vil det si at en gruppe $(G, *)$ er abelsk? Er symmetrigruppen du fant i (a) abelsk?