EKSAMEN MAT1060 V24: LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1 (a). Det karakteristiske polynomet er

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2^2 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

For å vise at -1 og 3 er egenverdier til A regner vi ut

$$p_A(-1) = 1 + 2 - 3 = 0 \qquad \text{og} \qquad p_A(3) = 9 - 6 - 3 = 0,$$

siden egenverdiene er røttene til det karakteristiske polynomet. (Man kan også vise at -1 og 3 er egenverdiene til A ved å løse ligningen $p_A(\lambda) = 0$ med eller uten hjelp fra *abc*-formelen.)

Oppgave 1 (b). En $n \times n$-matrise B er invertibel hvis og bare hvis $\det B \neq 0$. Altså vil vi løse ligningen

$$0 = \det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & b & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ b & 1 \end{vmatrix} = -8b + 4.$$

Vi konkluderer derfor med at matrisen B ikke er invertibel når $b = \dfrac{1}{2}$.

Oppgave 2. Overgangsmatrisen blir

$$M = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Matrisen M er stokastisk fordi alle tallene i matrisen er ikke-negative og summen av hver kolonne er lik 1. Siden M er stokastisk så vil det dynamiske systemet ha en likevektstilstand. (En alternativ måte å forklare hvorfor det dynamiske systemet har en likevektstilstand er ved å løse ligningen $M\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Løsningen er

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

for alle tall t. Denne vektoren er en likevektstilstand for alle $t \neq 0$.)

Oppgave 3. Nullrommet til en matrise A består av alle vektorer $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Om vi setter $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0, \\ 4x + 5y + 6z &= 0. \end{aligned}$$

Fra første ligning får vi $x = -2y - 3z$, som innsatt i andre ligning gir $-3y - 6z = 0$. Om vi lar $z = t$ får vi da $y = -2t$ og $x = 4t - 3t = t$. Altså er løsningene av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ gitt ved

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

for et tall t. Dette viser at en basis for nullrommet til A er

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Siden A er en 2×3-matrise, så sier dimensjonsteoremet at

$$3 = \operatorname{rang} A + \operatorname{nullitet} A.$$

Da basisen for nullrommet til A kun inneholder én vektor er $\operatorname{nullitet} A = 1$. Altså er rangen til A lik $3 - 1 = 2$. (Alternativt kan man regne ut $\operatorname{rang} A$ ved å finne en basis for kolonnerommet til A.)

Oppgave 4 (a). Fikspunktmengden til m består av alle løsninger av ligningen $m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Vi skriver om ligningen som $5A\mathbf{x} + 5\mathbf{b} = 5\mathbf{x}$. Dersom $\mathbf{x} = (x, y)^T$ blir ligningssystemet

$$\begin{aligned} -4x + 3y + 30 &= 5x, \\ 3x + 4y - 10 &= 5y. \end{aligned}$$

De to ligningene forenkles begge til $y = 3x - 10$, så denne rette linjen er altså fikspunktmengden til m. Siden fikspunktmengden er en rett linje, så er m speiling om denne linjen. (Man kan også beskrive den rette linjen som

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

for alle tall t.)

Oppgave 4 (b). *Ordenen* til en isometri m av planet er det minste hele tallet $k \geq 1$ slik at $m^k = I$. Siden $m(x) = B\mathbf{x}$ for en ortogonal 2×2-matrise B, så vet vi at m enten er en rotasjon om origo eller en speiling om en rett linje som går gjennom origo. Siden $B^2 \neq I$ er det klart at $B \neq I$, siden $I^2 = I$. Vi har da at $B \neq I$, $B^2 \neq I$ og $B^3 = I$, så m har orden 3. Siden speilinger har orden 2 kan vi konkludere med at B er en rotasjon, altså at

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

for et tall $0 \leq \theta < 2\pi$. Siden m har orden 3 må vi ha enten $\theta_1 = 2\pi/3$ eller $\theta_2 = 4\pi/3$ og, følgelig, er

$$B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 5 (a). Mengden $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er ortonormal siden

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \frac{1}{15}\sqrt{5^2 + 10^2 + (-10)^2} = 1, \\ \|\mathbf{v}\| &= \frac{1}{15}\sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2} = 1, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{15^2}\big(5 \cdot 2 + 10 \cdot 10 - 10 \cdot 11\big) = 0. \end{aligned}$$

Oppgave 5 (b). La oss skrive

$$\mathbf{w} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Matrisen $A = \big(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w}\big)$ er ortogonal hvis og bare hvis $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$. Vi vet fra **5 (a)** at $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er en ortonormal mengde, som vi kan utvide til en ortonormal basis $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ for $\mathbb{R}^3$ om vi velger

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{1}{15^2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & 5 & 2 \\ \mathbf{j} & 10 & 10 \\ \mathbf{k} & -10 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{15^2}\big(210\mathbf{i} - 75\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\big) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Det betyr at $a = 14$, $b = -5$ og $c = 2$. (Det eneste andre riktige svaret er $a = -14$, $b = 5$ og $c = -2$ som vi får ved å velge $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.)

Oppgave 6 (a). Vi lar 0 betegne punktet der de to tetraedene møter hverandre. Objektet har fire forskjellige typer isometrier. Av uransakelige årsaker inkluderer vi identiteten i den første typen.

1. Rotasjon av orden 3 om linjen som går gjennom midtpunktene til de to trekantene $\triangle 123$ og $\triangle 456$ gir opphav til symmetriene

$$\begin{aligned} \varrho_{\frac{2\pi}{3}} &= (3, 1, 2, 6, 4, 5), \\ \varrho_{\frac{4\pi}{3}} &= (2, 3, 1, 5, 6, 4), \\ I &= (1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{aligned}$$

   (Linjen kan også beskrives som den vertikale linjen som går gjennom 0.)
2. Vi får tre symmetrier ved å rotere objektet opp-ned (tenk på objektet som et timeglass). Vi beskriver kun én av disse presist: La ℓ være linjen som går gjennom 0 og som er parallell med linjestykket $\overline{23}$ (og med linjestykket $\overline{56}$). En rotasjon av orden 2 om ℓ gir symmetrien

$$(4, 6, 5, 1, 3, 2).$$

   De to andre symmetriene av samme type er

$$(6, 5, 4, 3, 2, 1) \qquad \text{og} \qquad (5, 4, 6, 2, 1, 3).$$

   (Symmetriene av type 2 kan alternativt beskrives som kombinasjoner av symmetriene av type 3 og type 4.)
3. Det er tre speilesymmetrier. Vi beskriver igjen kun én av disse presist. La P være planet som inneholder 0, 1 og midtpunktet på linjestykket $\overline{23}$. Merk at P også inneholder 4 og midtpunktet på linjestykket $\overline{56}$. Speiling i P bevarer altså 1 og 4, men bytter plass på 2 og 3 og på 5 og 6, det vil si

$$\sigma_{1,4} = (1, 3, 2, 4, 6, 5).$$

   De to andre symmetriene av samme type er

$$\sigma_{2,5} = (3, 2, 1, 6, 5, 4) \qquad \text{og} \qquad \sigma_{3,6} = (2, 1, 3, 5, 4, 6).$$

   Vi skriver her $\sigma_{a,b}$ for å indikere at speilingen bevarer punktene a og b.

4. La P_0 være planet som inneholder 0 og som er parallelt med planet som inneholder $1, 2, 3$. Merk at P_0 også er parallelt med planet som inneholder $4, 5, 6$. La σ_0 betegne speiling i P_0. Vi ser at σ_0 ikke gir oss en symmetri da den for eksempel sender 4 på midtpunktet til linjestykket $\overline{23}$. Vi kan kompensere for dette med en rotasjon om linjen som står vinkelrett på planet og går gjennom 0. Det er den samme linjen som vi roterer om for symmetriene av type 1, så vi kaller disse rotasjonene ϱ_θ. Altså får vi speilerotasjonene

$$\begin{aligned}\varrho_{\frac{\pi}{3}}\sigma_0 &= (5, 6, 4, 2, 3, 1),\\ \varrho_{\pi}\sigma_0 &= (4, 5, 6, 1, 2, 3),\\ \varrho_{\frac{4\pi}{3}}\sigma_0 &= (6, 4, 5, 3, 1, 2).\end{aligned}$$

(Vi finner vinklene ved å se på $\triangle 123$ og $\sigma_0\triangle 456$ som en regulær sekskant. Vi kan alternativt beskrive P_0 som horisontalplanet som inneholder 0.)

En generell kommentar om retting: Vi forventer ikke så deltajerte svar som gitt her.

Oppgave 6 (b). En gruppe $(G, *)$ kalles abelsk dersom $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ for alle g_1 og g_2 i G. Gruppen fra **6 (a)** er ikke abelsk. Den enkleste måten å se dette på er at symmetriene av type 1 og type 3 danner en undergruppe som er isomorf med symmetrigruppen til en likesidet trekant (den dihedrale gruppen D_3), som vi vet at ikke er abelsk. Vi kan eksplisitt gi et eksempel ved å regne

$$s_{1,4} * \varrho_{\frac{2\pi}{3}} = s_{2,5} \qquad \text{og} \qquad \varrho_{\frac{2\pi}{3}} * s_{1,4} = s_{3,6}.$$

(Det finnes også andre eksempler som viser at gruppen ikke er abelsk.)