

Fasit til oppgaver, kapittel 1

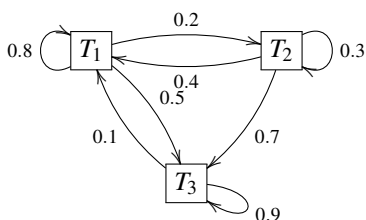
Oppgave 1.

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.9 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

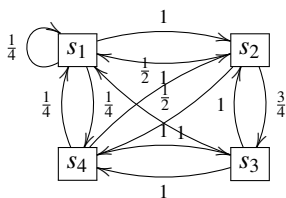
Oppgave 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3.



Oppgave 4.



Oppgave 5. a) $\begin{pmatrix} 120 \\ 180 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.32 & 0.68 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix}$

Oppgave 6. a) $\begin{pmatrix} 240 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 & 0.17 \\ 0.17 & 0.66 & 0.17 \\ 0.17 & 0.17 & 0.66 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$

Oppgave 7.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.45 \\ 0.3 & 0.55 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.525 \\ 0.35 & 0.475 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 110 \\ 90 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 117.5 \\ 112.5 \end{pmatrix}$$

Avhengig av summen av komponentene.

Oppgave 8.

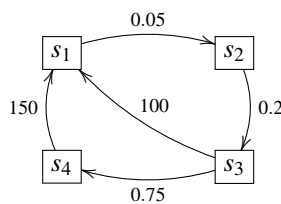
$$\begin{pmatrix} 0.998 & 0.65 & 0 \\ 0.002 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.35 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_\infty = \begin{pmatrix} 650 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Forrdelingen vil være uavhengig av startverdi.

Oppgave 9.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 150 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 \end{pmatrix}$$

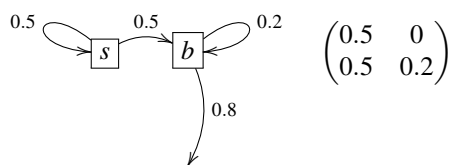
$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 112.5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7.5 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 95000 \\ 500 \\ 200 \\ 375 \end{pmatrix}$$

Etter hvert blir fordelingen mellom komponentene (ca.) 4300:174:28:17

Oppgave 10.



$$s_{t+1} = 0.5s_t \\ b_{t+1} = 0.5s_t + 0.2b_t$$

Preparatet forsvinner etter hvert ut, men vil etter hvert fordele seg med forholdet $s : b = 3 : 5$.

Oppgave 11.

Fasit til oppgaver, kapittel 2

Oppgave 1. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Oppgave 2. a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2c & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3c & 1 \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nc & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4. a)

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Produktet $B \cdot A$ har ingen mening.

c)

$$AB = (2), BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

d) $AB = BA = (6)$

Oppgave 5. a) 22 b) 2 c) -1 d) 1

Oppgave 6. a) $\lambda^2 + \lambda - 2$, Egenverdier: 1 og -2

b) $\lambda^2 - 5\lambda - 12$, Egenverdier: $\frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}$

c) $\lambda^2 - \lambda - 1$, Egenverdier: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

d) $\lambda^2 - 2\lambda - 8$, Egenverdier: 4 og -2

e) $\lambda^2 - 1$, Egenverdier: 1 og -1

Oppgave 7. a)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$-\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$-\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8.

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 9. a) $x = 1, y = 1$

b) $x = -\frac{5}{2}, y = 2$

c) $x = 2, x = 1$

Oppgave 10.

Oppgave 11. Produktet av to ortogonale matriser er en ortogonal matrise fordi

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} = Q^T P^T = (PQ)^T$$

Oppgave 12.

$$\det(A) = 4 \neq 0 \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Egenverdier: 1 og 4

Oppgave 13.

$$\det(A) = 1 \quad A^{-1} = A$$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$$

Eigenverdier: 1 og -1

Oppgave 14.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 15. Underbestemt

Fasit til oppgaver, kapittel 3

Oppgave 1.

Oppgave 2.

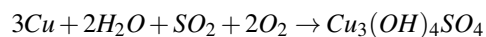
Oppgave 3.

Oppgave 4.

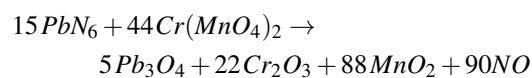
Oppgave 5. a) $\mathbf{w} = -\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$ b) $\mathbf{w} = \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{7}{3}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{v}_3$
c) Nei

Oppgave 6. a) Nei b) $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ c) Nei

Oppgave 7.



Oppgave 8.



Oppgave 9.

Oppgave 10.

Oppgave 11.

Oppgave 12.

Oppgave 13.

Oppgave 14. 2

Oppgave 15. 2

Oppgave 16. a) 2 b) 1 c) 0

Oppgave 17. a) 3 b) 1 c) 2

Oppgave 18. a) Ja b) Nei c) Nei

Oppgave 19.

Oppgave 20.

Oppgave 21. a) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ b) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

Oppgave 22. a) $x(1, 1)$ b) $x_1(1, 1, 1)$ c) bx

Oppgave 23.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 24. Dimensjonen til V er 8, kan ikke si noe om dimensjonen til W .

Oppgave 25. n

Oppgave 26. a) $\lambda^2 - 1$, egenverdier: 1 og -1

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Oppgave 27. a) $\lambda^2 - 2\lambda + 1$, egenverdi $\lambda = 1$

b) Egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ingen basis

Oppgave 28. a)

$$\begin{aligned} T(af + bg) &= \frac{1}{2}x \frac{d}{dx}(af + bg) \\ &= \frac{1}{2}ax \frac{df}{dx} + \frac{1}{2}bx \frac{dg}{dx} \\ &= aT(f) + bT(g) \end{aligned}$$

b)

$$T(ax^2 + bx + c) = \frac{1}{2}x(2ax + b)$$

c) ax^2 og bx

Fasit til oppgaver, kapittel 4

Oppgave 1. a) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Oppgave 2. a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 3. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 4. a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \mathbf{x} +$

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$ d) Identiteten

Oppgave 5. a) $\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Oppgave 6. $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

Oppgave 7. Rotasjon med $-\theta$.

Oppgave 8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Oppgave 9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Oppgave 10. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Oppgave 11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 13. $(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$

Oppgave 14. $(-1, 0)$

Oppgave 15. Linja $x + y + 2 = 0$

Oppgave 16. Linja $2x - 2y + 1 = 0$

Oppgave 17. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hjørner: $(0,0)$ $(0,1)$ $(-1,0)$ $(-1,1)$

Oppgave 18. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *hjørner:* (0,0) (1,1) (-1,1)
(0,2)

Oppgave 19. $\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *hjørner:* (1,1) (2,1) (1,2)
(2,2)

Oppgave 20. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, *hjørner:* (1,2) (1,3)
(2,3) (2,4)

Oppgave 21. $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(T \circ S)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 22. $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T \circ S)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 23. $S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(T \circ S)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 24. $S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(T \circ S)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Oppgave 25. $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $(T \circ S)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$