MAT1060 Oppgaveløsninger til uke 11

Bjørn Skauli

Oppgave-eksempel 1

1a)

Først undersøker vi hvilke symmetrier som flytter en bestemt enhetscelle tilbake til seg selv. Identitetsavbildningen gjør naturligvis dette. Vi kan også rotere med en vinkel $\frac{2\pi}{3}$ rundt sentrum av en enhetscelle. Vi kan reflektere rundt midtnormalene i en enhetscelle.

Vi ser så på symmetriene som flytter en bestemt enhetscelle til en annen enhetscelle. Vi kan translatere med lengde 1 langs alle sidekantene, rotere med vinkel $\frac{\pi}{3}$ rundt alle hjørnene og reflektere rundt alle sidekantene til en enhetscelle. Ikke alle disse operasjonene er nødvendig for å dekke alle symmetriene. Så lenge vi kan reflektere en enhetscelle vertikalt kan vi også reflektere rundt de to andre midtnormalene.

Oppgave-eksempel 2

2a)

$$v \times w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

2b)

Vi kan regne ut at

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (1,1,0) \cdot (-1,1,2) = -1 + 1 + 0 = 0$$

og

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (0, 2, -1) \cdot (-1, 1, 2) = 0 + 2 - 2 = 0$$

2c)

Vi husker at

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

Så vi kan regne ut

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) &= 2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) - (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &= 2\mathbf{k} - (-\mathbf{j}) + 2 \cdot 0 - \mathbf{i} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (-1, 1, 2)\end{aligned}$$

2d)

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (1, 0, 1) \cdot (-1, 1, 2) = 1$$

Alternativt kan vi regne ut:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

2e)

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$[\mathbf{k}, \mathbf{j}, \mathbf{i}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Oppgave 1

Enhetscellen kan reflekteres rundt den lange midtnormalen. Gitteret kan også forskyves med 2 oppover og med 1 horisontalt. Til slutt kan gitteret også reflekteres og forskyves med 1.

Oppgave 2

Enhetscellen kan reflekteres vertikalt og horisontalt. Gitteret kan dessuten forskyves med 2 vertikalt, med 2 horisontalt og forskyves på skrå med 1 horisontalt og 1 vertikalt samtidig. Denne siste forskyvningen inneholder de to andre.

Oppgave 3

3a)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (-2, 0, 2)$$

3d)

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0$$

Oppgave 4

4a)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (-3, 0, -2)$$

4d)

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = -5$$