MAT1060 Oppgaveløsninger til uke 12

Bjørn Skauli

Oppgave-eksempel 1

1a)

For å sjekke at A er ortogonal, sjekker vi at $A^T A = I$. Vi regner ut:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1b)

Vi bruker formelen

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\lambda^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2))\lambda + \det(A)$$

og finner at det karakteristiske polynomet til A er:

$$-\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$$

Vi vet at siden A er ortogonal og $\det(A) = -1$, så har A -1 som en egenverdi. Så vi gjør polynomdivisjonen:

$$-\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 : (\lambda + 1) = -(\lambda^2 + 1)$$

Siden $(\lambda^2 + 1)$ ikke har noen reelle nullpunkter vil A også ha to komplekse egenverdier.

Egenverdien tilhørende -1 kan vi finne ved å løse ligningen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dette gir de tre ligningene

$$-y = -x \tag{2}$$
$$x = -y \tag{3}$$
$$-z = -z \tag{4}$$

Fra de to første ligningene kan vi se at vi må ha $x = y = 0$, og fra den siste ligningen ser vi at z kan velges fritt, så en egenvektor vil være $(0, 0, 1)$.

1c)

For å finne fikspunktene til A må vi løse ligningen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dette gir de tre ligningene

$$-y = x \tag{5}$$
$$x = y \tag{6}$$
$$-z = z \tag{7}$$

Fra de to første ligningene kan vi se at vi må ha $x = y = 0$, og fra den siste ligningen ser vi at z også må være 0. Så det eneste fikspunktet er $(0, 0, 0)$.

Isometrien som A representerer er en refleksjon rundt x, y-planet, kombinert med en rotasjon rundt z-aksen. Dette er fordi den bare har ett fikspunkt, så den må være en rotasjon kombinert med en refleksjon, og egenvektoren med egenverdi -1 utspenner z-aksen.

Oppgave-eksempel 2

2a)

Linjestykket XP svarer til vektoren $p - x$, og linjestykket XQ svarer til vektoren $q - x$. For å vise at XP og XQ står normalt på hverandre må vi vise at $(p - x) \cdot (q - x) = 0$. Vi at $p + q = 0$, så $p = -q$. Vi kan sette dette inn og få:

$$(p - x) \cdot (-p - x) = -p \cdot p - p \cdot x + x \cdot p + x \cdot x = -|p|^2 + |x|^2$$

Videre har vi antatt at $|P| = |X|$, så vi ser fra ligningen over at $(p - x) \cdot (-p - x) = 0$, så vektorene står normalt på hverandre.

Oppgave 1

1b)

En egenvektor med egenverdi -1 er

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1c)

Det eneste fikspunktet for A er $(0, 0, 0)$ og A er en refleksjon kombinert med en rotasjon med rotasjonsakse $(-1, 3, 1)$.

Oppgave 2

2b)

Egenvektorer med egenverdi 1 er i underrommet utspent av

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2c)

Fikspunktene for matrisen er i det samme underrommet. Siden det er et todimensjonalt underrom av fikspunkter er A bare en ren refleksjon.

Oppgave 3

Sirkelen har sentrum i (1,1) og radius 2