MAT1060 Oppgaveløsninger til uke 14

Bjørn Skauli

Oppgave-eksempel 1

1a)

For å regne ut normen til **v** og **w** bruker vi formelen

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1^2 + 2v_2^2 + 3v_3^3 = 1 + 2 = 3$$

Så $\|v\| = \sqrt{3}$ Tilsvarende kan vi regne ut

$$\|\mathbf{w}\|^2 = w_1^2 + 2w_2^2 + 3w_3^2 = 4 + 2 + 3 = 9$$

Så $\|\mathbf{w}\| = 3$

1b)

For å vise at **v** og **w** står normalt på hverandre, må vi vise at $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Vi regner ut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$$

1c)

Vi kan regne ut at

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så
$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 3^2+3 = 12$$
og derfor er $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = 3\sqrt{2}$. Vi kan se at
$$\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2$$

1d)

Likheten vi viste i forrige punkt kunne vi også visst p.g.a Pythagoras' setning.

Oppgave-eksempel 2

2a)

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \int_0^1 (3-3x)^2 dx = \int_0^1 9x^2 - 18x + 9dx$$
$$= [3x^3 - 9x^2 + 9x]_0^1 = (3-9+9) - 0 = 3$$

så
$$\|f(x)\| = \sqrt{3}$$
og på lignende vis kan vi regne ut at
$$\|g(x)\|^2 = \langle g(x), g(x)\rangle = \int_0^1 (1-6x+6x^2)^2 dx$$
$$= \int_0^1 36x^4 - 72x^3 + 48x^2 - 12x + 1dx = [\frac{36}{5}x^5 - 18x^4 + 16x^3 - 6x^2 + x]_0^1$$
$$= (\frac{36}{5} - 18 + 16 - 6 + 1) - 0 = \frac{1}{5}$$
$$\|g(x)\| = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

2b)

For å vise at $f(x)$ og $g(x)$ står normalt på hverandre regner vi ut
$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 (3-3x)(1-6x+6x^2)dx = \int_0^1 -18x^3 + 36x^2 - 21x + 3dx$$
$$= -\frac{9}{2} + 12 - \frac{21}{2} + 3 = \frac{-9+24-21+6}{2} = 0$$

2c)

Siden $f(x)$ og $g(x)$ står normalt på hverandre, kan vi bruke Pythagoras' setning for å se at

$$\|f(x)+g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|-g(x)\|^2 = \|f(x)-g(x)\|^2$$

2d)

Vi kan bruke Pythagoras' setning og regne ut:

$$\|f(x)+g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2 = \frac{16}{5}$$

Setter vi dette inn så kan vi sjekke at

$$\|f(x)+g(x)\|^2 + \|f(x)-g(x)\|^2 = 2\|f(x)\|^2 + 2\|g(x)\|^2$$

Oppgave 1

1a)

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$$
$$\|\mathbf{w}\| = 1$$

1c)

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\| = \sqrt{3}$$

Oppgave 2

2a)

$$\|A\| = \sqrt{3}$$
$$\|B\| = \sqrt{2}\sqrt{3}$$
$$\|C\| = 3$$

Oppgave 3

3a)

$$\|f(x)\| = 1$$
$$\|g(x)\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3c)

$$\frac{2}{3}$$

Et polynom som står normalt på 1 og x er $x^2 - \frac{2}{3}$

Oppgave 4

4a)

$$\|e^x\| = \frac{1}{4}(e^2 - e^{-1})$$
$$\|e^{-x}\| = \frac{1}{4}(e^2 - e^{-1})$$
$$\langle e^x, e^{-x} \rangle = 1$$