MAT1060 Oppgaveløsninger til uke 15

Bjørn Skauli

Oppgave-eksempel 1

1a)

Vi ser at en symmetri er å rotere figuren med multipler av $\frac{2\pi}{5}$, som gir oss fem symmetrier. Det er også fem refleksjoner, så totalt har symmetrigruppen orden 10.

1b)

Som vi så i forrige oppgave er det en undergruppe av rotasjoner, og fem undergrupper av refleksjoner. I tillegg så har vi den trivielle undergruppen, og hele gruppen.

1c)

Undergruppen av rotasjoner har ingen fikspunkter, imens undergruppene av refleksjoner har ett fikspunkt hver. Den trivielle undergruppen har fem fikspunkter og hele gruppen har ingen fikspunkter.

Oppgave-eksempel 2

2a)

Vi har sett at multiplikasjon av matriser er assosiativt, så vi må vise at produktet av to invertible matriser er invertibel, at invertible matriser har invertible inverser og at identitetsmatrisen er invertibel.

De to siste er åpenbart sanne, for å se at produktet av to invertible matriser A, B er invertibelt, så husker vi at en matrise er invertibel hvis determinanten er forskjellig fra null.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

og dette tallet er forskjellig fra null siden $\det(A) \neq 0$ og $\det(B) \neq 0$.

2b)

Gruppen er ikke abelsk, siden f.eks.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2c)

Noen undergrupper er:

- Multipler av identitetsmatrisen
- Diagonale matriser
- Matriser med 1,1 på diagonalen og null nederst til venstre
- Matriser med 1,1 på diagonalen, null nederst til venstre og et heltall øverst til høyre
- Matriser med determinant ± 1

Oppgave 1

1a)

Ordenen på gruppen er 12

1b)

Undergruppene er:

1. Den trivielle undergruppen.
2. Alle rotasjonene
3. Undergruppen generert av rotasjon med $\frac{2}{3}\pi$
4. Undergruppen generert av rotasjon med π
5. Undergruppene generert av en enkelt refleksjon gjennom to hjørner (3 stk.)
6. Undergruppene generert av en enkelt refleksjon gjennom midtnormalen til en side (3 stk.)
7. Undergruppen generert av rotasjon med π og en refleksjon (3 stk.)
8. Undergruppen generert av rotasjon med $\frac{2}{3}\pi$ og refleksjoner av type 4
9. Undergruppen generert av rotasjon med $\frac{2}{3}\pi$ og refleksjoner av type 5
10. Hele gruppen

1c)

Antallet fikspunkter for hver av undergruppene over er:

1. 6
2. 0
3. 0
4. 0
5. 2
6. 0
7. 0

8. 0
9. 0
10. 0

Oppgave 2

2a)

Symmetriene er rotasjon med π og refleksjon om en horisontal og vertikal akse.

2b)

Ordenen er 4

2c)

Undergruppene er

1. Den trivielle undergruppen
2. Undergruppen bestående av en rotasjon
3. Undergruppen bestående av en refleksjon (2 stk.)
4. Undergruppen bestående av en refleksjon og en rotasjon (2 stk.)
5. Undergruppen bestående av alle refleksjonene
6. Hele gruppen

2d)

Antallet fikspunkter er som følger:

1. 6
2. 0

3. 0 eller 2 (for refleksjon om hhv. den vertikale og horisontale aksen)
4. 0
5. 0
6. 0

Oppgave 3

3b)

- Rotasjon med en vinkel delelig med $\frac{2}{n}\pi$ for et tall n
- Refleksjon om en bestemt akse
- Ortogonale matriser med determinant 1

Oppgave 4

4b)

Nei

4c)

Ja, denne gruppen er abelsk.