2.3 Determinanten

Hinweis

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Def: Determinanten ist eine $n \times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die definiert wird

$$\det(A)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

hvor

S_n = mængden af permutationer

af mængden $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ hvis σ er et produkt

af k transpositioner

Transposition = ombytte av to elementer

Eks

$(1,2,3) \longrightarrow (1,3,2) \rightarrow (3,1,2)$

Permutasjonen σ som sender $(1,2,3)$ på $(3,1,2)$ har

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^2 = 1.$$

Eks:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Alternativ notasjon for determinant:

Hvis $A = (a_{ij})$, skriver vi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Prop</u> Hvis $A = (a_{ij})$ er en $n \times n$ matrise, så er

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} \det(A_j),$$

hvor A_j er $(n-1) \times (n-1)$ matrisen som framkommer ved å skyke første rad og j-te søyle i A.

Eks: $n = 3$, $j = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Eks: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= -(-3) - 2(3 \cdot 1 - 2 \cdot 4)$

$= 3 - 2 \cdot (-5) = 13.$

Teorem Hvis A og B er $n \times n$ matriser, så gjelder

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

//

Prop: Hvis A' fremkommer ved å multiplisere én av søylene (eller én av radene) i A med et reelt tall c, så er

$$\det(A') = c \cdot \det(A).$$

Bevis Opplagt fra definisjonen. //

Prop: $\det(cA) = c^n \cdot \det(A)$

hvis A er en $n \times n$ matrise.

Prop $\det(A^T) = \det(A)$.

//

Prop: Bytter vi om på to rader eller to søyler i en $n \times n$ matrise, skifter determinanten fortegn

Eks: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = cb - ad$$
$$= -(ad - bc)$$

Prop: Hvis A er invertibel, så er $\det(A) \neq 0$, og

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Bevis: $\det(A) \cdot \det(A^{-1})$

$= \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$

$= 1$ ∎

Teorem: For en kvadratisk matrise A gjelder:

A invertibel $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. //

Prop: Determinanten til en triangulær matrise er produktet av elementene på diagonalen.

Eks:

$$\begin{vmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-4) = -24.$$

Def: Determinanten til en ortogonal matrise er ± 1.

Bevis: Hvis $A^T \cdot A = I$, er

$$1 = \det(I) = \det(A^T) \cdot \det(A)$$

$$= \det(A)^2$$

$$\Rightarrow \det(A) = \pm 1. \quad //$$

Linear likningssystemer

Def Et lineært likningssystem i n variable $x_1, \dots, x_n$ har formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Skriver vi $A = (a_{ij})$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

kan dette systemet uttrykkes

på formen

$$A \cdot x = b.$$

Dersom $b = 0$ kalles systemet homogent, ellers inhomogent.

Prop Dersom A er en inverterbar kvadratisk matrise, har likningen

$$A \cdot x = b$$

nøyaktig én løsning, nemlig

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Bevis: $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}Ax$

$= A^{-1} \cdot b$. //

Eks: $x + y = 5$

$x - y = 1$

$2x + 3y = -1$.

Fra de to første likningene finner vi $x = 3$, $y = 2$.

Siste likning:

$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \neq -1$.

$\Rightarrow$ Systemet har <u>ingen</u> løsning.

Merk: Hvis et inhomogent system har flere likninger enn ukjente, har man normalt ingen løsning.

Eks: Likningssystemet

$$x - 2y = 1$$

$$x - 2y = 2$$

har ingen løsning.

Sjekker: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

Eks: Metangass brenner i oksygen med (ubalansert) reaksjonslikning

$$CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

Vi ønsker en balansert likning

$$x_1 CH_4 + x_2 O_2 \rightarrow x_3 CO_2 + x_4 H_2O$$

$$x_1 = x_3$$

$$4x_1 = 2x_4$$

$$2x_2 = 2x_3 + x_4$$

Vi mydder opp:

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_4 = 0$$

$$2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

$$x_3 = x_1,$$

$$x_4 = 2x_1$$

$$2x_2 = 2x_1 + 2x_1 = 4x_1,$$

$$x_2 = 2x_1$$

Vi velger $x_1 = 1$:

$$CH_4 + 2O_2 \rightsquigarrow CO_2 + 2H_2O.$$